石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

平面设计

缓和曲线

主讲 ： 严战友 副教授

目录

在线开放课程

一种曲率连续变化的曲线。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

缓和曲线的设置：

1. **直线**（曲率=0）与**圆曲线**（**曲率＝C）之间**

2.半径相差较大的**圆曲线**（**曲率＝C1和C2）之间**

一、缓和曲线的作用与性质

（一）**缓和曲线的作用**

1. **曲率连续变化，便于车辆行驶（车的轨迹）**
2. **离心加速度**逐渐变化，旅客感觉舒适（**人的感觉**）
3. **超高、加宽**逐渐变化，行车更加平稳（**施工连续**）
4. 与圆曲线**配合**得当，增加线形美观（**视觉效果**）

曲率不连续，视觉效果突兀

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

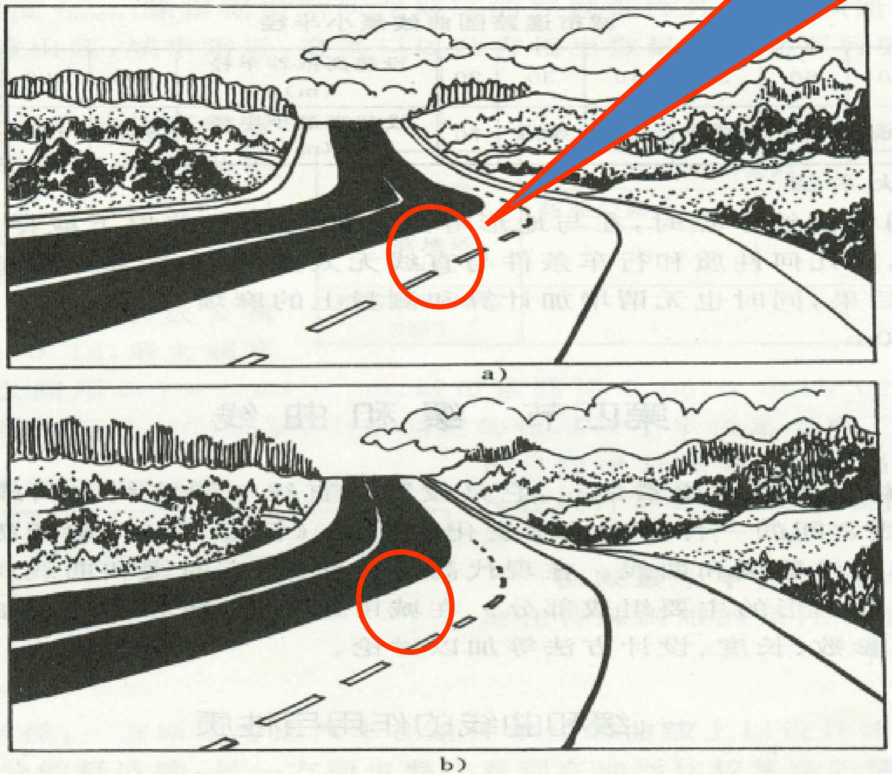


图 3-9　直线与曲线连接效果图
a）不设缓和曲线感觉路线扭曲；b）设置缓和曲线后变得平顺美观

（二）缓和曲线的性质

- 方向盘转动角度为φ与前轮转动角度为ϕ的关系：
- $\phi = k\varphi$

- 式中：φ是一向盘转动的角度，
- $\varphi = \omega t$
- 汽车前轮的转向角为
- $\phi = k\omega t$ （rad）
- t—行驶时间

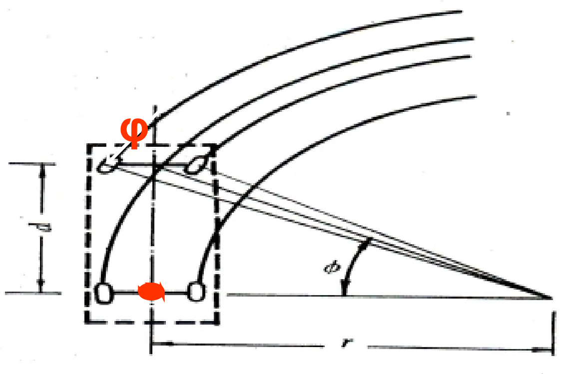


图 3-10 汽车的转弯行驶

- 轨迹曲率半径：

$$r = \frac{d}{\mathrm{tg}\,\varphi}$$

ϕ值很小，故：

$$r=\frac{d}{tg\phi}\approx\frac{d}{\phi}=\frac{d}{k\omega l} \quad\Rightarrow\quad t=\frac{d}{k\omega r}$$

经时间t以后，其行驶距离（弧长）为*l*:

$$l=vt \quad (m)$$

$$l=\frac{vd}{k\omega r}=\frac{vd}{k\omega}\cdot\frac{1}{r} \qquad C=\frac{vd}{k\omega}$$

$$l=\frac{C}{r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{rl=C}$$

说明：行驶轨迹的弧长与曲线的曲率半径之乘积为一常数，——回旋线性质。

二、回旋线作为缓和曲线

在线开放课程

（一）回旋线的数学表达式

我国《标准》规定缓和曲线采用回旋线。

回旋线的基本公式为：

$$rl=A^2 \qquad (rl=C) \quad \text{——极坐标方程式}$$

式中：r——回旋线上某点的曲率半径（m）；

l——回旋线上某点到原点的曲线长（m）；

A——回旋线的参数。A表征曲率变化的缓急程度。

1. 回旋线的参数值A的确定：

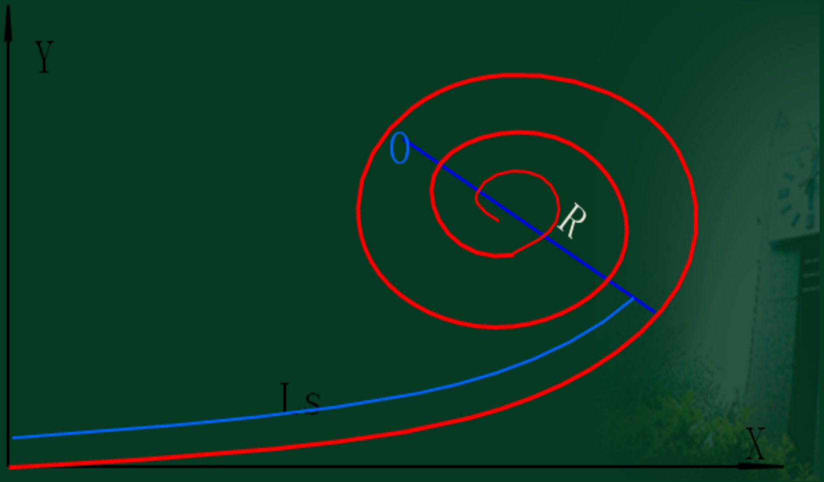
- 回旋线的应用范围：

缓和曲线起点：回旋线的起点，l=0，r=∞；

缓和曲线终点：回旋线某一点，l＝L_s，r＝R。

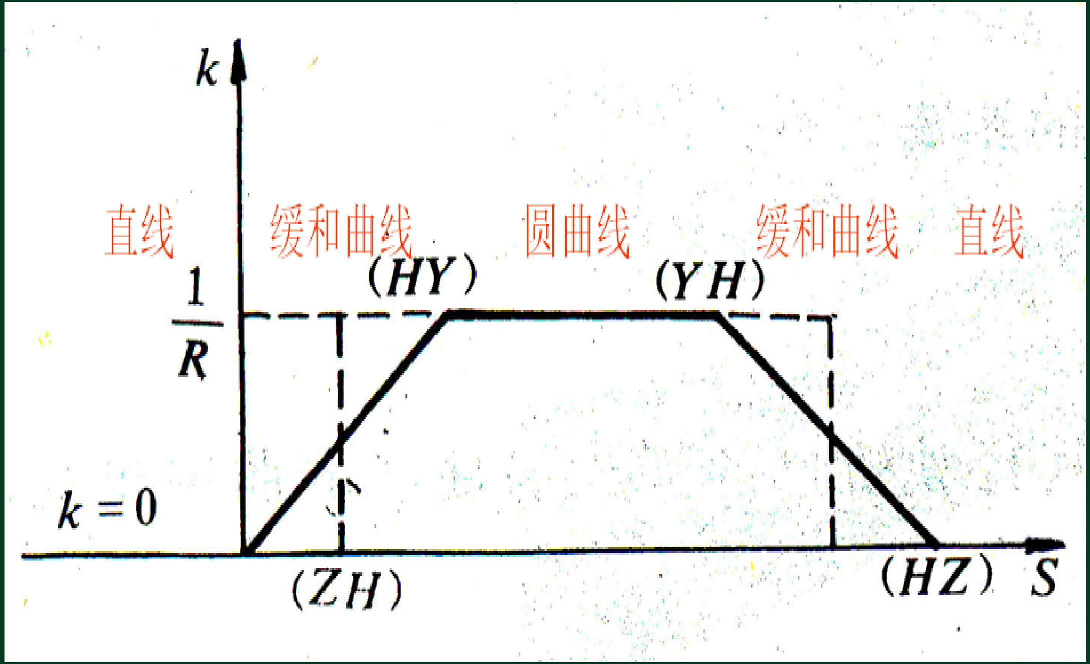
则 $RL_s=A^2$，即回旋线的参数值为：

$$A=\sqrt{RLs}$$



缓和曲线的曲率变化：

$rl=A^2$　　$k=1/r=l/A^2$——线性关系



2. 回旋线的数学表达式:

回旋线微分方程为:

$$dl = r \cdot d\beta \quad *$$

$$dx = dl \cdot \cos\beta$$

$$dy = dl \cdot \sin\beta$$

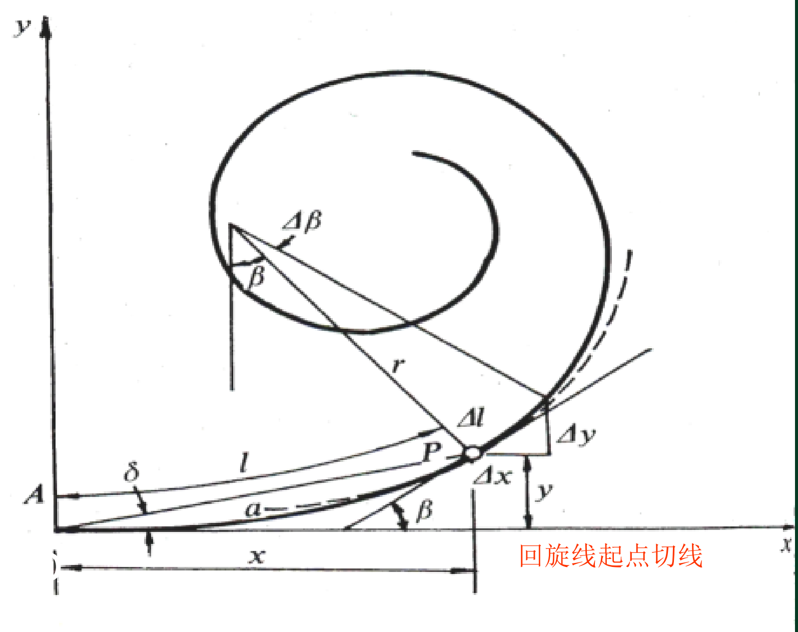


图 3-11 回旋线

以$r=A^2/l$代入*得:

$$dl = \frac{A^2}{l} \cdot d\beta$$

或$l \cdot dl = A^2 \cdot d\beta$

在线开放课程

- 初始条件：当$l=0$时，$\beta=0$。
- 对$l\cdot dl=A^2\cdot d\beta$积分得：

$$\frac{l^2}{2}=A^2\beta\ ,\ \beta=\frac{l^2}{2A^2}$$

式中：β—回旋线上任一点的半径方向与Y轴的夹角。

对回旋线微分方程组中的dx、dy积分时，可把cosβ、sinβ用泰勒级数展开，然后用代入β表达式，再进行积分。

dx，dy的展开：

$$\beta = \frac{l^2}{2A^2}$$

$$dx = \cos\beta \, dl = \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \cdots\right) dl$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^6 + \cdots\right] dl$$

$$= \left(1 - \frac{l^4}{8A^4} + \frac{l^8}{384A^8} - \frac{l^{12}}{46080A^{12}} + \cdots\right) dl$$

$$dy = \sin\beta \, dl = \left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \cdots\right) dl$$

$$= \left[\frac{l^2}{2A^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^5 - \frac{1}{5040}\left(\frac{l^2}{2A^2}\right)^7 + \cdots\right] dl$$

$$= \left(\frac{l^2}{2A^2} - \frac{l^6}{48A^6} + \frac{l^{10}}{3840A^{10}} - \frac{l^{14}}{645120A^{14}} + \cdots\right) dl$$

对dx、dy分别进行积分：

回旋线终点坐标计算公式：

在回旋线终点处，$l = Ls$，$r = R$，$A^2 = RLs$

$$X = Ls - \frac{Ls^5}{40A^4} + \frac{Ls^9}{3456A^8} \cdots$$

$$= Ls - \frac{Ls^3}{40R^2} + \frac{Ls^5}{3456R^4} \cdots = Ls - \frac{Ls^3}{40R^2}$$

$$Y = \frac{Ls^3}{6A^2} - \frac{Ls^7}{336A^6} + \frac{Ls^{11}}{42240A^{10}} \cdots$$

$$= \frac{Ls^2}{6R} - \frac{Ls^4}{336R^3} + \frac{Ls^6}{42240R^5} \cdots$$

回旋线终点的半径方向与Y轴夹角β_0计算公式：

$$\beta = \frac{l^2}{2A^2} \Rightarrow \beta_0 = \frac{Ls^2}{2A^2} = \frac{Ls}{2R}$$

（二）回旋线的几何要素

1. 各要素的计算公式

基本公式：$r \cdot l = A^2$，

$$\beta = \frac{l^2}{2A^2}$$

任意点P处的曲率半径：

$$r = \frac{A^2}{l} = \frac{l}{2\beta} = \frac{A}{\sqrt{2\beta}}$$

P点的回旋线长度：

$$l = \frac{A^2}{r} = A\sqrt{2\beta} = 2\beta$$

P点的半径方向与Y轴的夹角

$$\beta = \frac{l^2}{2A^2} = \frac{l}{2r} = \frac{A^2}{2r^2}$$

P点曲率圆的内移值：

- $p = y + r\cos\beta - r$
- P点曲率圆圆心M坐标：
- $x_m = x - r\sin\beta$
- 缓和曲线终点时：

$$\boxed{x_m = q = x - R\sin\beta_0}$$

- $y_m = r + p$
- P点的弦长：

$$a = \frac{y}{\sin\delta}$$

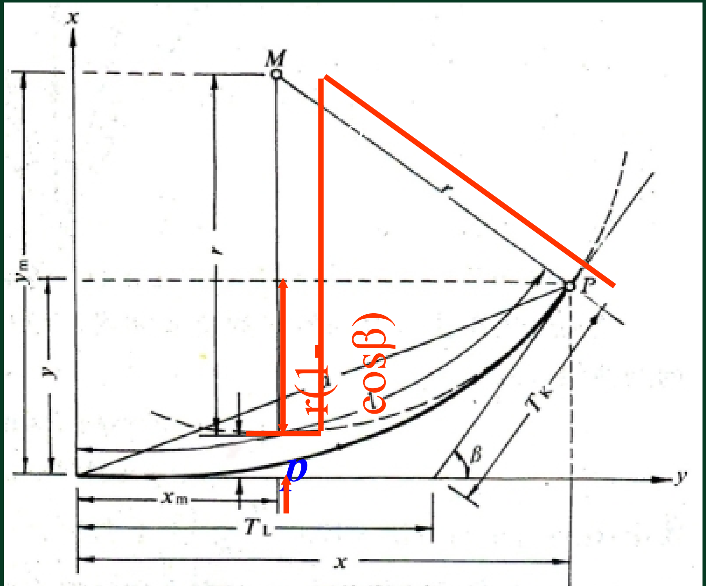


图 3-13 回旋线要素

P点弦偏角：

$$\delta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\beta}{3}\ (\mathrm{rad})$$

2. 有缓和曲线的道路平曲线几何元素：

(1) 几何元素的计算公式：

切线长：

$$T=(R+p)tg\frac{\alpha}{2}+q\ (m)$$

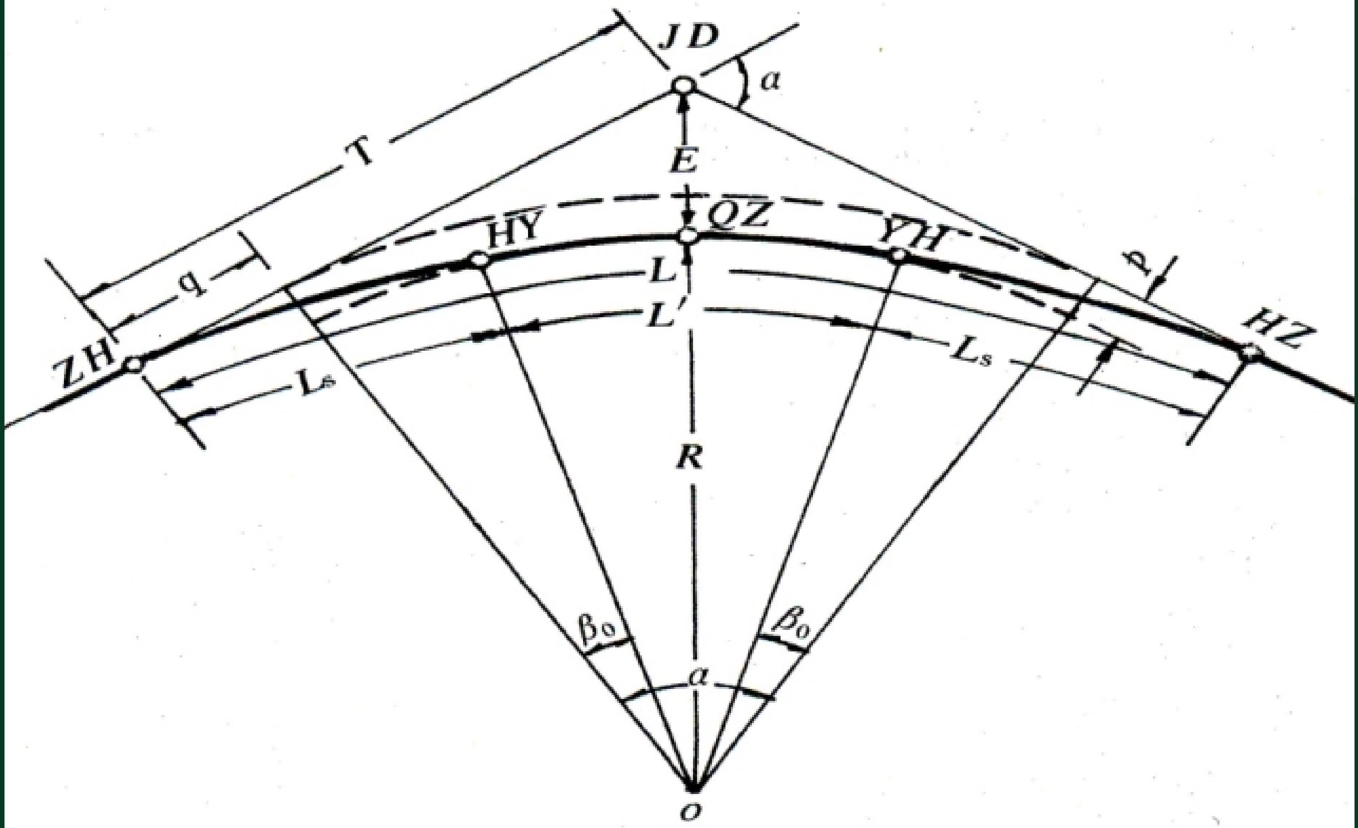
曲线长：$q=x-R\sin\beta_0$

$$L=(\alpha-2\beta_0)\frac{\pi}{180}R+2L_s\ (m)$$

$$=\frac{\pi}{180}\alpha R+L_s\ (m)$$

外距：$E=(R+p)\sec\frac{\alpha}{2}-R\ (m)$

校正值：J = 2T - L


JD
α
T
E
QZ
HY
YH
q
p
L
L'
Ls
Ls
ZH
HZ
R
β0
β0
α
O

(2)主点里程桩号计算方法：

以交点里程桩号为起算点：

ZH = JD − T

HY = ZH + Ls

QZ = ZH + L/2

YH = HZ − Ls

HZ = ZH + L

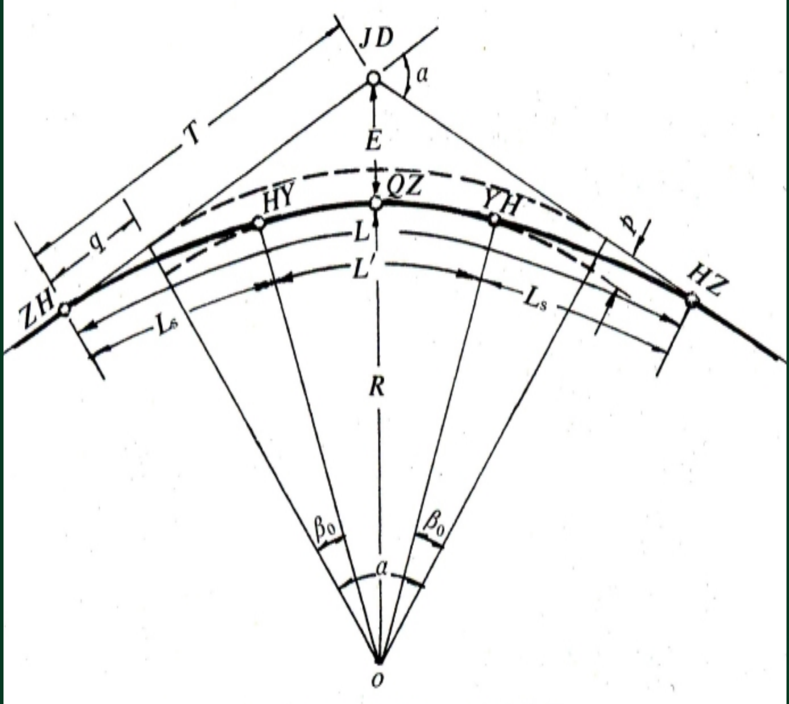


图 3-14 “基本型”平曲线

（三）回旋线的相似性

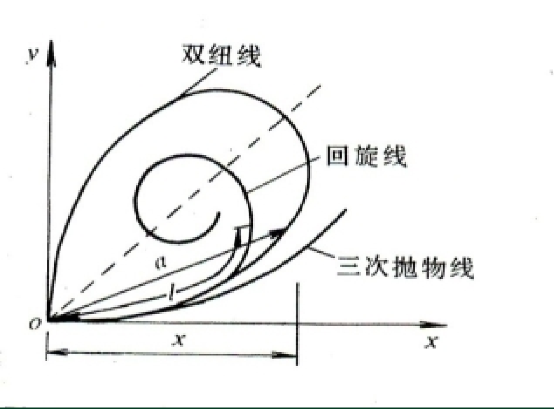
- 回旋线：曲率的变化与曲线长度的变化呈线性关系。
- 可以认为：回旋线的形状只有一种，
- 只需改变参数A就能得到不同的回旋曲线。
- A：放大系数，回旋线的这种相似性对于简化计算。
- A=1时——单位回旋线
- 长度要素：切线长、曲线长、内移值，直角指标
- 非长度要素：缓和曲线角，弦偏角
- 关系：回旋线长度要素＝单位长度要素XA
- 回旋线非长度要素＝单位非长度要素

三、其它形式的缓和曲线

在线开放课程

- （一）三次抛物线
- 三次抛物线的方程式：

$$r = \frac{C}{x}$$



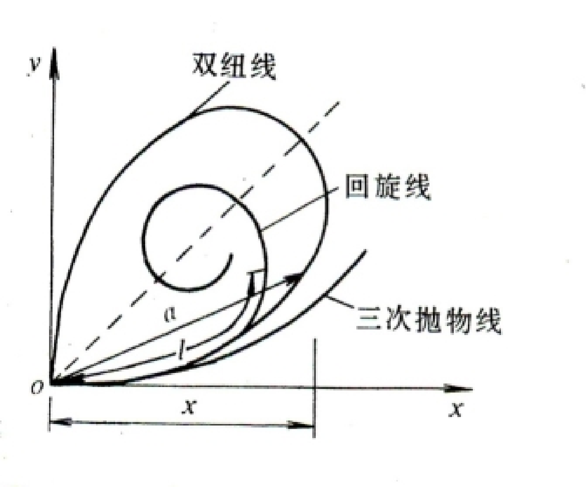
- 三次抛物线方程式：
- x=l

$$y = \frac{x^3}{6C}$$

- β ≧24°曲率半径又增加
- β ≦24°可用

- （二）双纽线
- 双纽线方程式：
- 用弦长a代替l，方程变为：

$$r=\frac{C}{a}$$



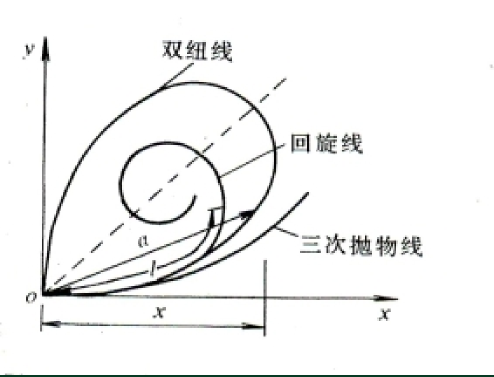
- 极角＝45°时，曲线半径最小。
- 此后半径增大至原点，
- 全程转角达到270°。

可以用双纽线做回头曲线

（三） 三种缓和曲线线形比较：

在线开放课程

- 1. 极角较小（5°～6°）时，几乎没有差别。
- 2. 随着极角的增加，三次抛物线的长度增加最快，双纽线次之，回旋线最慢。
- 3. 曲率半径减小则与长度的变化相反。
- 4.推荐使用回旋线。



四、缓和曲线的最小长度及参数

- （一）缓和曲线的最小长度：
- 1．旅客感觉舒适：
- 离心加速度的变化率a_s：

离心加速度变化过快，旅客不舒适

$$a_s = \frac{a}{t} = \frac{v^2}{Rt}$$

- 在等速行驶的情况下：

$$t = \frac{Ls}{v}$$

$$a_s = \frac{v^3}{RLs} = 0.0214\frac{V^3}{RLs}$$

- 满足乘车舒适感的缓和曲线最小长度：

$$L_{s\min}=0.0214\frac{V^3}{a_s R}$$

缓和系数

- 英国：　$a_s=0.3$
- 美国：　$a_s=0.6$
- 我国公路计算规范一般建议$a_s=0.5\text{-}0.6$ （m/s^3）

$$L_{s\min}=0.036\frac{V^3}{R}$$

2. 超高渐变率适中

- 超高在缓和曲线上完成过渡：
- *ls*小，过渡快，线形扭曲；
- *ls*大，过渡慢，排水不利

《规范》给出适中的超高渐变率，最小长度的公式：

$$Ls_{min}=\frac{B\Delta_i}{p}$$

式中：**B**——旋转轴至行车道外侧边缘的宽度；

Δ_i——超高坡度与路拱坡度代数差（%）

；

p ——超高渐变率。

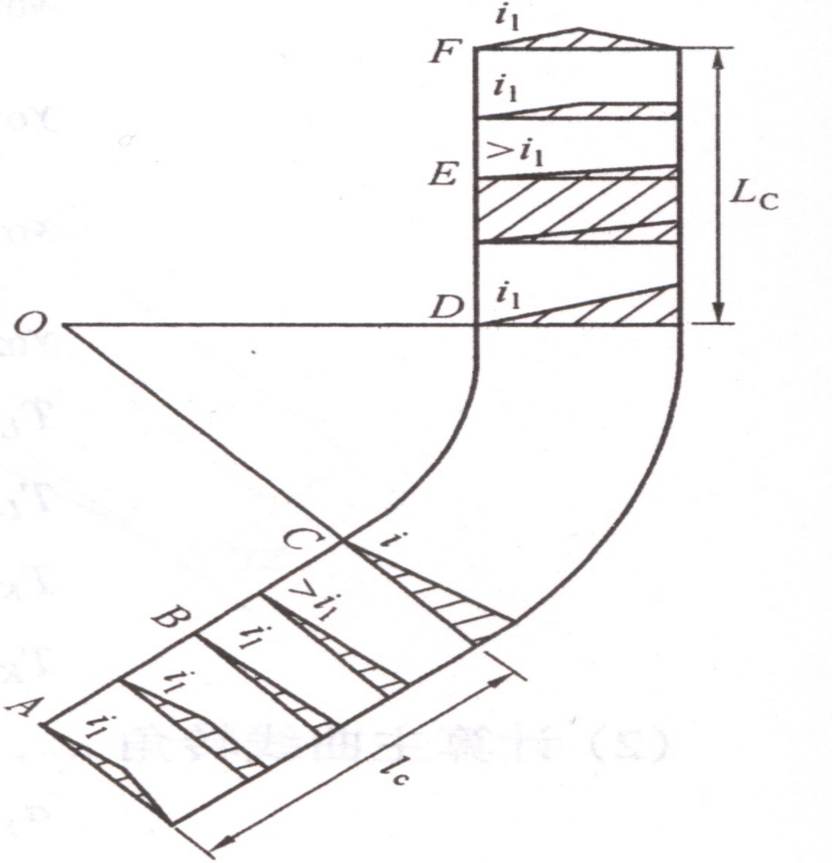


图 3-25　曲线的超高

3. 行驶时间不过短

- 行驶时间过短：司机驾驶操纵过于匆忙。
- 至少大于3s行车：$$Ls_{min}=\frac{V}{1.2}$$

表 3-13 各级公路缓和曲线最小长度

公路等级	高速公路			一			二		三		四
设计速度 /(km · h^{-1})	120	100	80	100	80	60	80	60	40	30	20
缓和曲线最小长度 /m	100	85	70	85	70	50	70	50	35	25	20

表 3-14 城市道路缓和曲线最小长度

设计速度 /(km · h^{-1})	80	60	50	40	30	20
缓和曲线最小长度 /m	70	50	45	35	25	20

回旋曲线参数的确定

- 回旋线参数表达式： $A^2 = R \cdot Ls$
- 从视觉条件要求确定A：
- 回旋线过短，β在3°左右时，曲线极不明显，易被忽略；
- 回旋线过长，β大于29°时，圆曲线与回旋线不协调。
- 适宜的缓和曲线角是β=3°～29°。

由β_0=3°～29°推导出合适的A值：

$$\beta_0 = 28.6479\frac{Ls}{R} \qquad Ls = \frac{R\beta_0}{28.6479}$$

$$A = \sqrt{R \cdot Ls} = R\sqrt{\frac{\beta_0}{28.6479}}$$

$$\boxed{\beta_0 = \frac{Ls^2}{2A^2} = \frac{Ls}{2R}}$$

- 将β_0=3°和β_0=29°分别代入上式，则A的取值范围为：

$$\frac{R}{3} \le A \le R$$

（三）缓和曲线的省略

- 内移值为p：

$$p = \frac{Ls^2}{24R}$$

- 在Ls一定时：，R大，p小
- R＝∞，p＝0
- R大到一定程度，线形上已经没有多大差异。
- 一般认为：p≤0.10时，可忽略缓和曲线。
- 取*ls*为3s行程，p=0.10，则不设缓和曲线的临界半径为：

$$R_h = \frac{L_s^2}{24p} = \frac{1}{24 \times 0.10}\left(\frac{V}{1.2}\right)^2 = 0.29V^2$$

在线开放课程

表 11 应设缓和曲线的最大曲线半径

计算行车速度(km/h)	120	100	80	60	40	30
最大曲线半径(m)	4 000	3 000	2 000	1 000	500	260

- 考虑到缓和曲线还有完成超高和加宽的作用，应按超高控制。

表 3-7 不设超高圆曲线最小半径(m)

设计速度(km/h)	120	100	80	60	40	30	20
$i_{路拱} \leq 2.0\%$ $\mu = 0.035 \sim 0.040$	5500	4000	2500	1500	600	350	150
$i_{路拱} > 2.0\%$ $\mu = 0.040 \sim 0.050$	7550	5250	3350	1900	850	450	200

- 《标准》规定：当公路的平曲线半径小于不设超高的最小半径时，应设缓和曲线。四级公路可不设缓和曲线。

《规范》规定可不设缓和曲线的情况：

- （1）直一圆之间，R≥“不设超高的最小半径”时；
- （2）同向圆一圆之间，$R_{小}$圆≥“不设超高的最小半径”时；
- （3）小圆半径大于下表半径，且符合下列条件之一时：

表 3-15 复曲线中的小圆临界曲线半径

公路等级	高速公路			一			二		三	
设计速度 /(km · h⁻¹)	120	100	80	100	80	60	80	60	40	30
临界曲线半径 /m	2 100	1 500	900	1 500	900	500	900	500	250	130

- ①小圆设最小长度回旋线时，其大圆与小圆的内移值之差不超过**0.10m**。
- ②**V≥80km/h**时，**R**大**/R**小小于**1.5**。
- ③**V<80km/h**时， **R**大**/R**小小于**2**。


电信
全能通
助您成功
2005 3 6

小结

- 1. 缓和曲线的作用与性质
- 2. 缓和曲线的形式
- 3. 缓和曲线的最小长度及参数