



石家莊鐵道大學  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

随机信号分析

功率谱分析及其应用

主讲：任彬

## (1) 功率谱分析

若自相关函数的傅里叶变换存在，则定义其傅里叶变换为**自功率谱函数**：

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

若互相关函数的傅里叶变换存在，则定义其傅里叶变换为**互功率谱函数**：

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

自功率谱密度函数是偶函数，它的频率范围是 $(-\infty, \infty)$

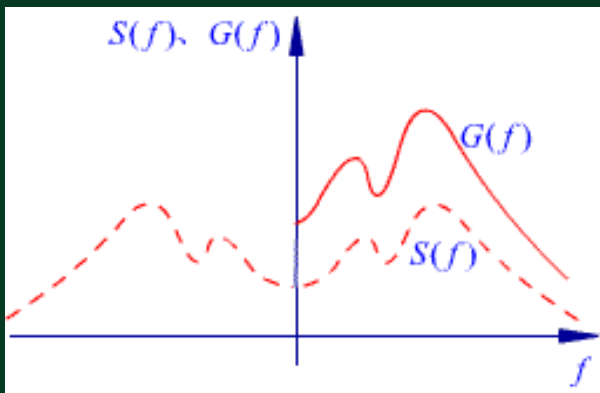


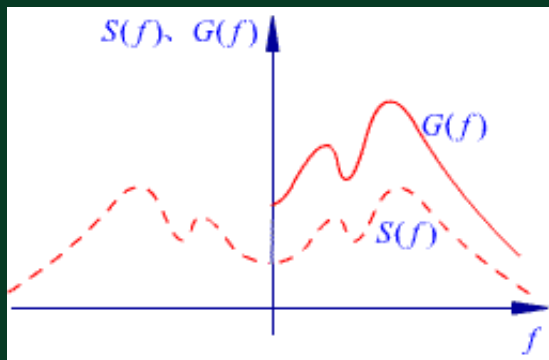
又称为**双边功率谱密度函数**。

在线开放课程

可用在 $(0, \infty)$ 频率范围内的**单边功率谱密度函数**来表示

信号的**全部功率谱**，即： $G_x(f) = 2S_x(f)$





物理意义：

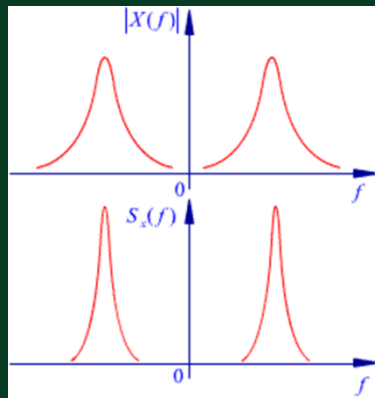
$S_x(f)$  曲线下和频率轴所包围的面积就是信号的平均功率。 $S_x(f)$  就是信号在单位频宽上的平均功率。即功率谱密度函数。

(功率密度函数沿频率轴的分布)。

## (2) 自功率谱应用

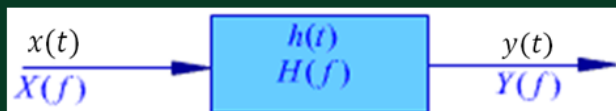
$$R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f)$$

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$



①自功率谱 $S_X(f)$ 为自相关函数 $R_X(\tau)$ 的傅立叶变换，**包含了自相关函数的全部信息。**

②自功率谱 $S_X(f)$ 反映信号的**频域结构**，和幅值谱 $|X(f)|$ 一致，但是自功率谱反映的是**信号幅值的平方**，频域结构特征更为明显。



$$\because Y(f) = H(f)X(f)$$

$$\text{又} \because S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2; \quad S_y(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |Y(f)|^2.$$

$$\therefore S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$$|H(f)| = \frac{\sqrt{S_y(f)}}{\sqrt{S_x(f)}}$$

①通过输入输出自谱的分析，可得出系统的幅频特性，但丢失了相位信息，不能得出系统的相频特性。

②自相关分析可以有效地检测出信号中是否有周期成分。自功率谱密度也能用来检测信号中的周期成分。

③周期成分在实测的自功率谱图形中以陡峭有限峰值的形态出现。

### (3) 互功率谱密度函数

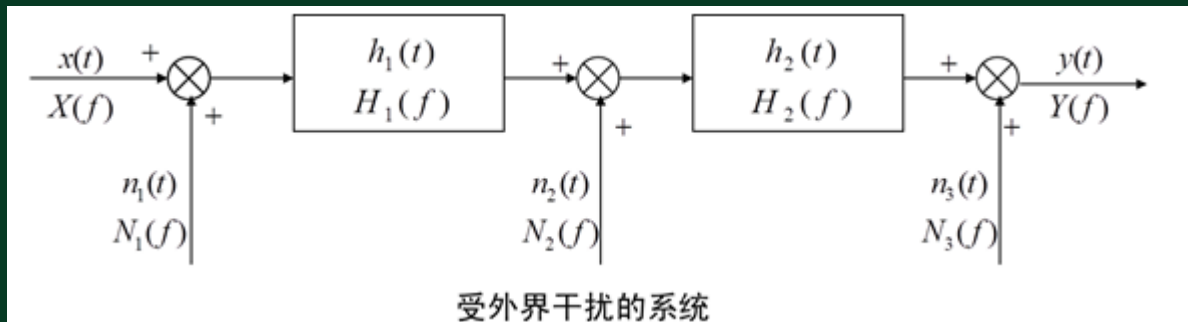
如果互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  满足傅里叶变换的条件，即互相关函数的积分为有限值，则定义

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$



## (4) 互谱的应用



$$y(t) = x(t) + n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau) + R_{xn1'}(\tau) + R_{xn2'}(\tau) + R_{xn3}(\tau)$$

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f) = H(f)S_x(f) = H_1(f)H_2(f)S_x(f)$$

互谱分析可以排除噪声的影响

## (5) 相干函数

如果信号 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的自谱和互谱分别为 $S_x(f)$ 、 $S_y(f)$ 、 $S_{xy}(f)$ ，则这两个信号之间的相干函数为

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)}$$

$$\gamma_{xy}^2(f) = 0$$

表示输出信号与输入信号不相干；

$$\gamma_{xy}^2(f) = 1$$

表示输出信号与输入信号完全相干

(系统不受外界干扰且系统是线性的)

$$0 < \gamma_{xy}^2(f) < 1$$

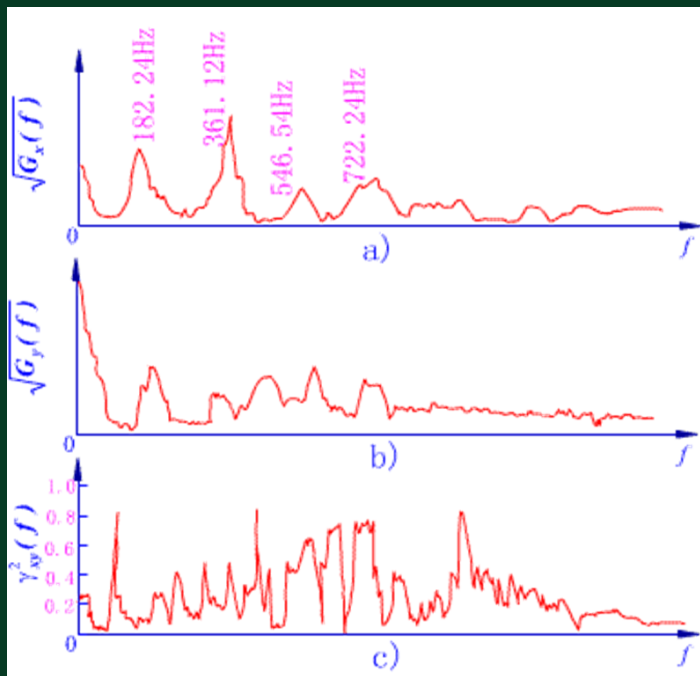
测试中有外界噪声干扰

输出 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 和其它输入的综合结果

联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的系统是非线性

## (6) 相干分析应用

例：对船用柴油机润滑油泵的压油管振动和压力脉冲间进行相干分析。润滑油泵转速 $n=781\text{r}/\text{min}$ ，油泵齿轮的齿数为 $z=14$ 。测得油压脉动信号 $x(t)$ 和压油管振动信号 $y(t)$ ，压油管压力脉动的基频为 $f_0=nz/60=182.24\text{Hz}$ 。



- a) 油压脉动信号x的自谱  
 b) 压油管振动信号y自谱  
 c) 相干函数

$$f = f_0 = 182.23$$

$$\gamma^2(f) \approx 0.9$$

$$f = 2f_0 = 361.12$$

$$\gamma^2(f) \approx 0.37$$

$$f = 3f_0 = 546.54$$

$$\gamma^2(f) \approx 0.8$$

$$f = 4f_0 = 722.24$$

$$\gamma^2(f) \approx 0.75$$

# 小结

- (1) 自谱、互谱的定义和应用
- (2) 相干函数定义及应用