石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

随机信号分析

相关分析及其应用

主讲 ： 任彬

相关分析及其应用

（1）相关的概念

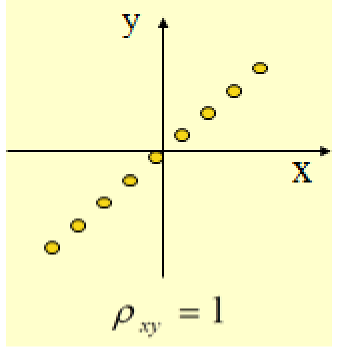
变量的相关是指变量间的关系。用两随机变量之积的数学期望定义，x，y之间的线性相关程度可以表示为： $\sigma_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]$

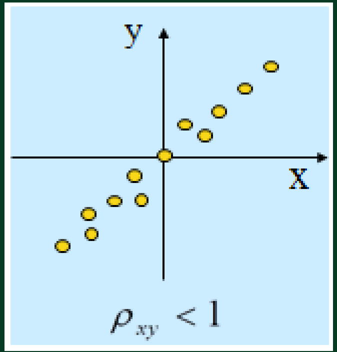
x和y完全不相关 $\sigma_{xy} \to 0$

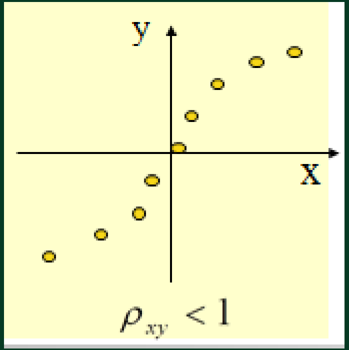
x和y线性相关 $\sigma_{xy} = 1$

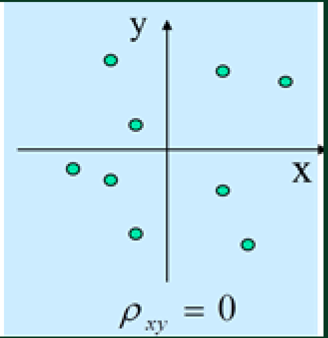
x和y非线性相关 $0 < |\sigma_{xy}| < 1$

两个变量之间的相关有三种类型：









a.线性相关
b.非线性相关
c.不相关

（2）相关系数

描述变量x,y之间的相关性。用两个变量的协方差和各自变量的均方差乘积的比值作为两个变量之间的相关系数。

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

(1) $\rho_{xy} = \pm 1$时，表示两变量 x，y完全线性相关。

(2) $\rho_{xy} = 0$时，表示两变量 x，y完全不线性相关。

(3) $0 < |\rho_{xy}| < 1$时，部分相关。

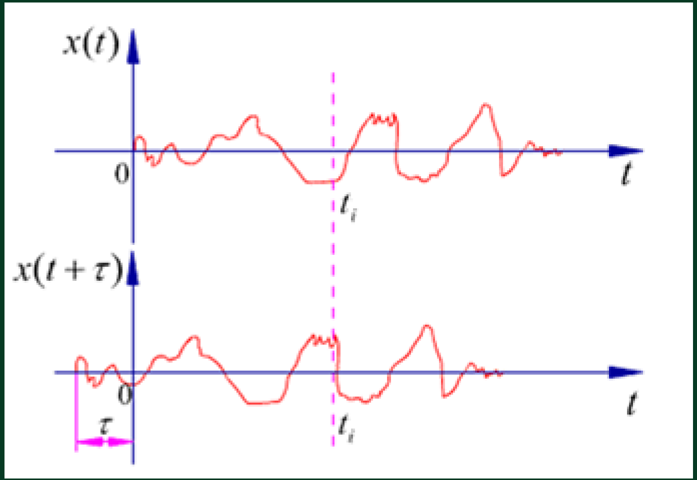
（3）相关函数

研究两个信号在时延（差）中的相关性。

相关分析：利用相关函数描述两个信号间的相互关系或其相似程度，还可以用来描述同一个信号现在值与过去值的关系，或根据过去值、现在值来估计未来值。

(4) 自相关函数

假如x(t)是某各态历经随机信号的一个样本记录，x(t+τ)是x(t)时移τ后的样本。



相关函数 $R_x(\tau)$ 为:

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

自相关函数性质:

① $u_x^{\ 2}-\sigma_x^{\ 2}\le R_x(\tau)\le\sigma_x^{\ 2}+u_x^{\ 2}$

② 当$\tau=0$时, $R_x(0)_{\max}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t)dt$

$$=\psi_x^{\ 2}=\sigma_x^{\ 2}+u_x^{\ 2}$$

自相关函数具有最大值,等于均方值

③

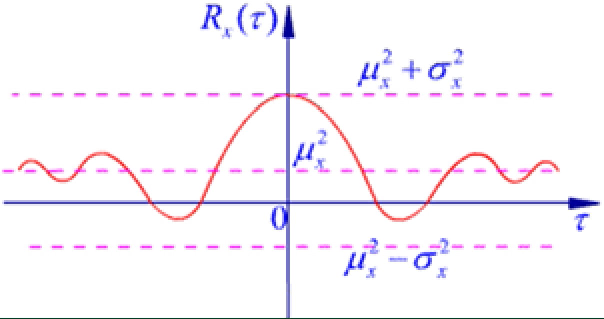
当 $\tau \to \infty$时，x(t) 与 $x(t+\tau)$彼此无关 $\rho_x(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$R_x(\tau) = \rho_x(\tau)\sigma_x^2 + \mu_x^2$$

$$R_x(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} \mu_x^2$$

④

$R_x(-\tau) = R_x(\tau)$（偶函数）



⑤ 周期信号的自相关函数仍为同频率的周期函数，其幅值与原信号的幅值有关，而丢失了原信号的相位信息。

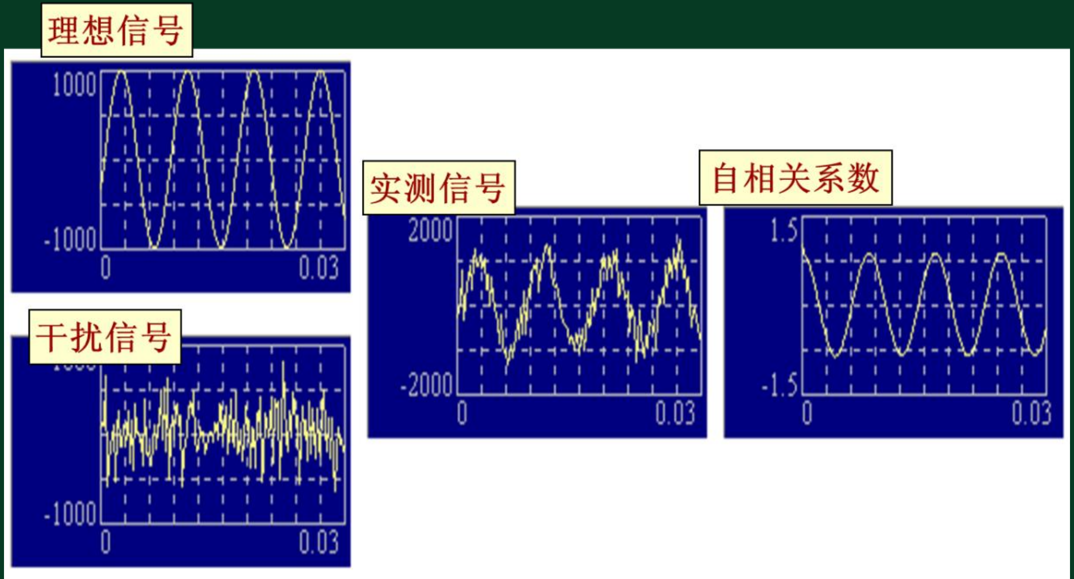
$$\begin{aligned} R_x(\tau+nT) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t+nT)x(t+nT+\tau)d(t+nT) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

例：求正弦信号$x(t)=x_0\sin(\omega t+\varphi)$的自相关函数。

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T x_0^2\sin(\omega t+\varphi)\sin\left[\omega(t+\tau)+\varphi\right]dt=\frac{x_0^2}{2}\cos\omega\tau$$

⑥ 不含周期随机信号的自相关函数将随着τ值的增大而很快衰减趋于0。只要含有周期成分，其自相关函数在τ值很大时都不衰减，且有明显的周期性。



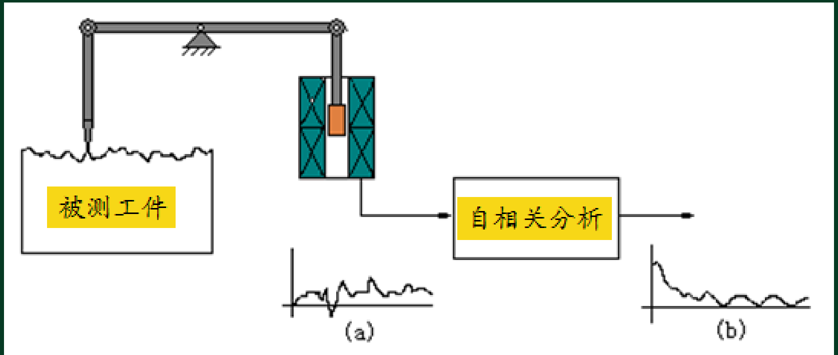
在线开放课程

提取周期性转速成分。

用来检测混肴在干扰信号中的确定性周期信号成分。

自相关应用

例 机械加工表面粗糙度自相关分析



提取出回转误差等周期性的故障源。

（5）互相关函数

两个各态历经过程的随机信号x(t)和y(t)的互相关函数Rxy(τ）定义为：

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{E\{[x(t)-\mu_x]\cdot[y(t)-\mu_y]\}}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\frac{R_{xy}(\tau)-\mu_x\mu_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

同一个信号之间的互相关函数就是该信号的自相关函数，同一信号的自相关函数和两个信号之间的互相关函数都是时移τ的函数。

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

互相关函数的性质：

①若x（t）、y（t）是二随机信号，

且二信号不具有同频的周期成分，则：

$$\lim_{T \to \infty} \rho_{xy} \to 0$$

$$\lim_{T \to \infty} R_{xy}(\tau) \to \mu_x \mu_y$$

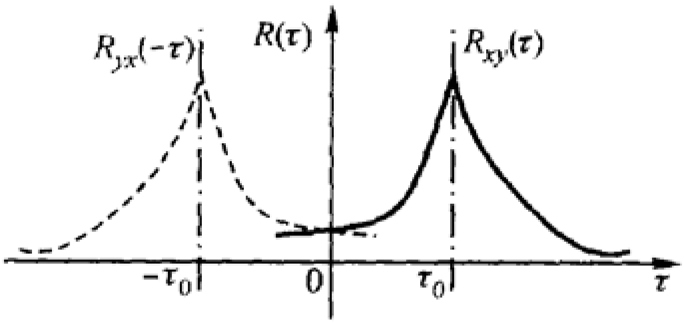
$$(\mu_x\mu_y - \sigma_x\sigma_y) \le R_{xy}(\tau) \le (\mu_x\mu_y + \sigma_x\sigma_y)$$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

②若两信号是同频的周期信号，则当$\tau \to \infty$时，互相关函数也会出现同频的周期成分；如果两信号含有频率不等的周期信号，则两信号不相关（同频相关，不同频不相关）

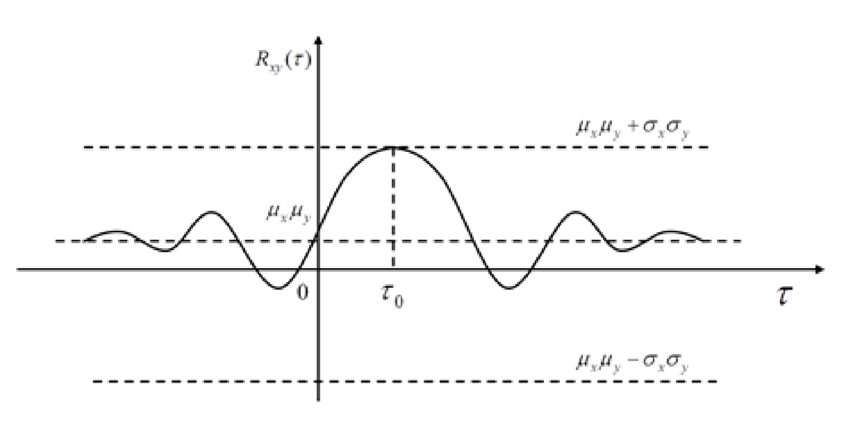
③两个具有相同周期的信号的互相关函数仍然是周期函数，周期相同，保留原信号的幅值和相位差性质。

④互相关函数不是偶函数，即$R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$



互相关函数的对称性

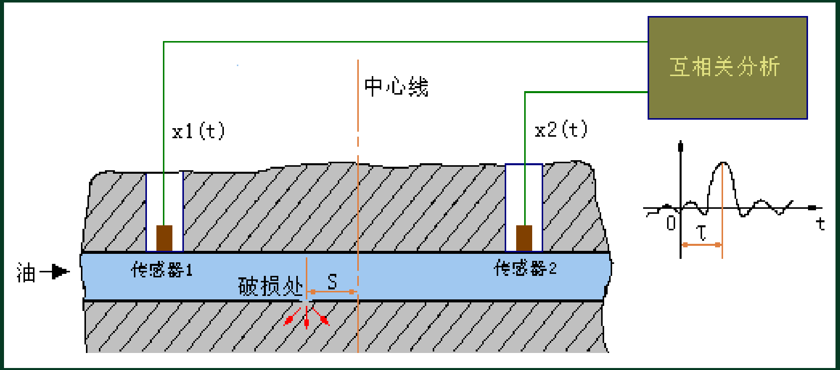
⑤两信号在相隔一时间间隔$t=\tau_0$处，互相关函数$R_{xy}(\tau)$可能有最大值，它反映了x(t)和y(t)之间主传输通道的滞后时间。

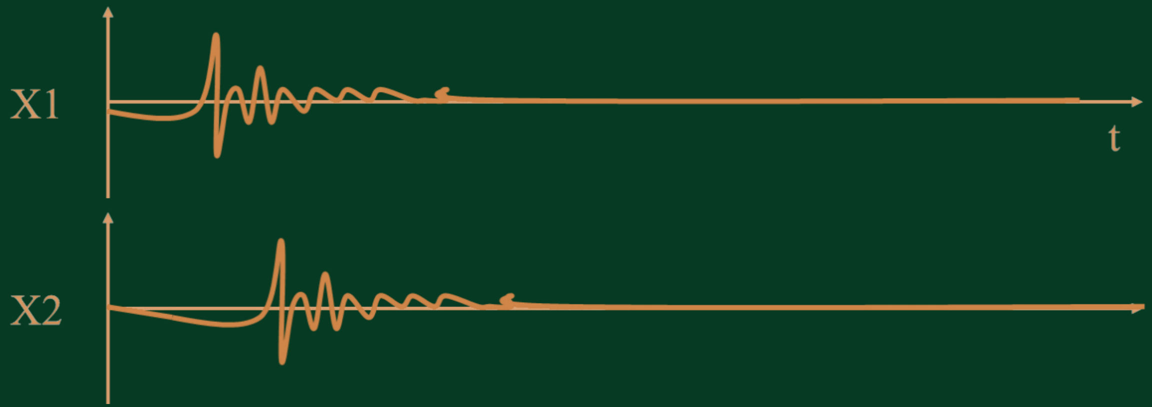


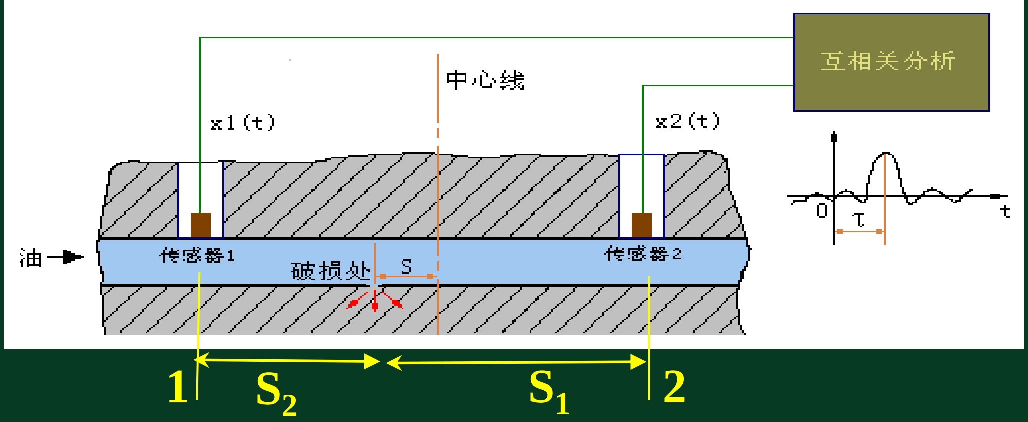
例：地下输油管道漏损位置的探测

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程





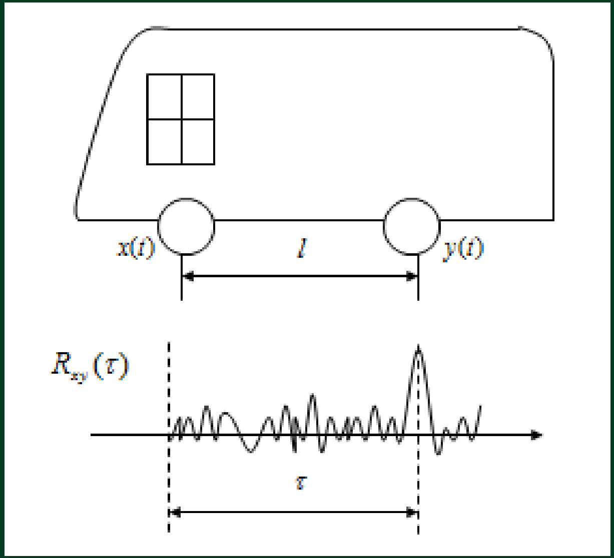


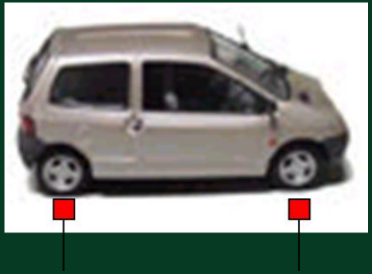
S_1-S_2=$v\tau_m$

S_1-S_2=2S

$$S=\frac{1}{2}v\tau_m$$

例：用互相关函数的原理测车速





$$V = \frac{l}{\tau}$$

小结

（1）相关函数、相关系数的概念

（2）自相关函数和互相关函数的物理意义和应用