



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

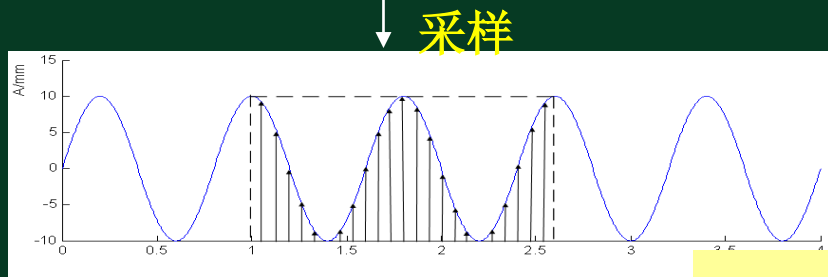
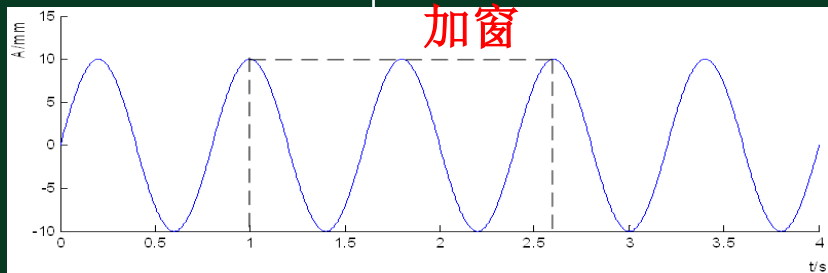
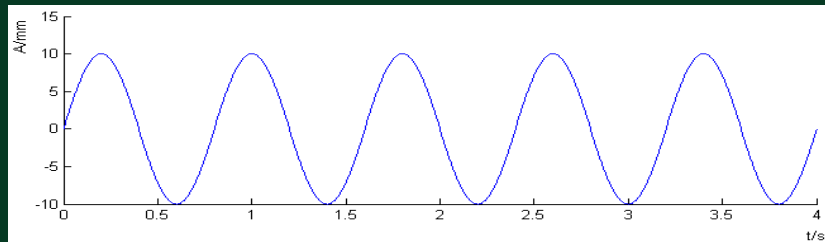
在线开放课程

信号的描述及其频谱分析

离散傅里叶变换（二）

主讲：牛江川

3. 信号的截断、能量泄漏和窗函数



$$x(t)$$

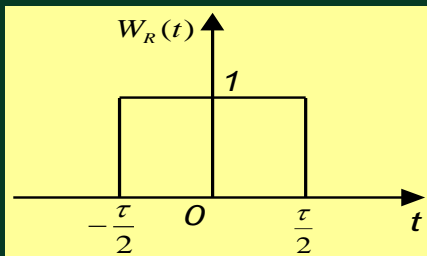
$$x(t) \cdot W_R(t)$$

$$x(t) \cdot W_R(t) \cdot g(t)$$

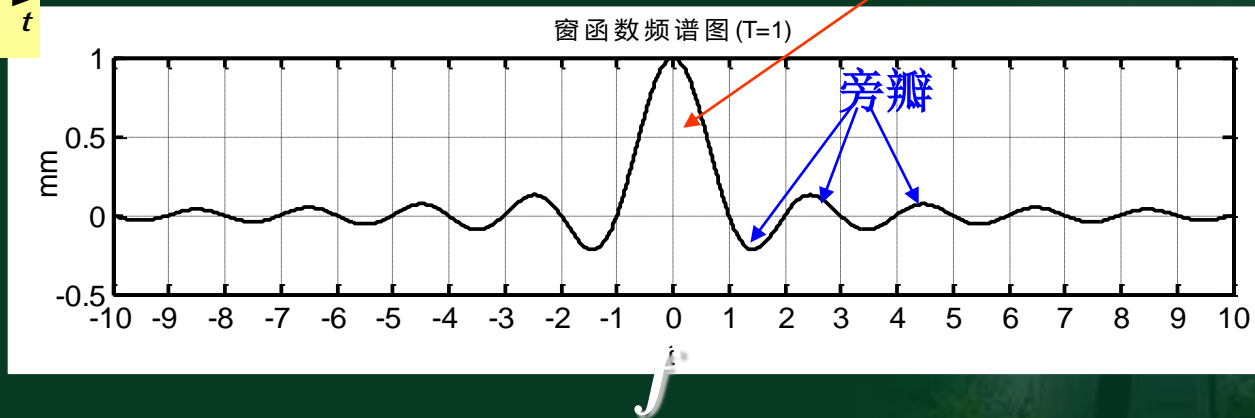
$$x(t) \cdot W_R(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

(1) 矩形窗函数

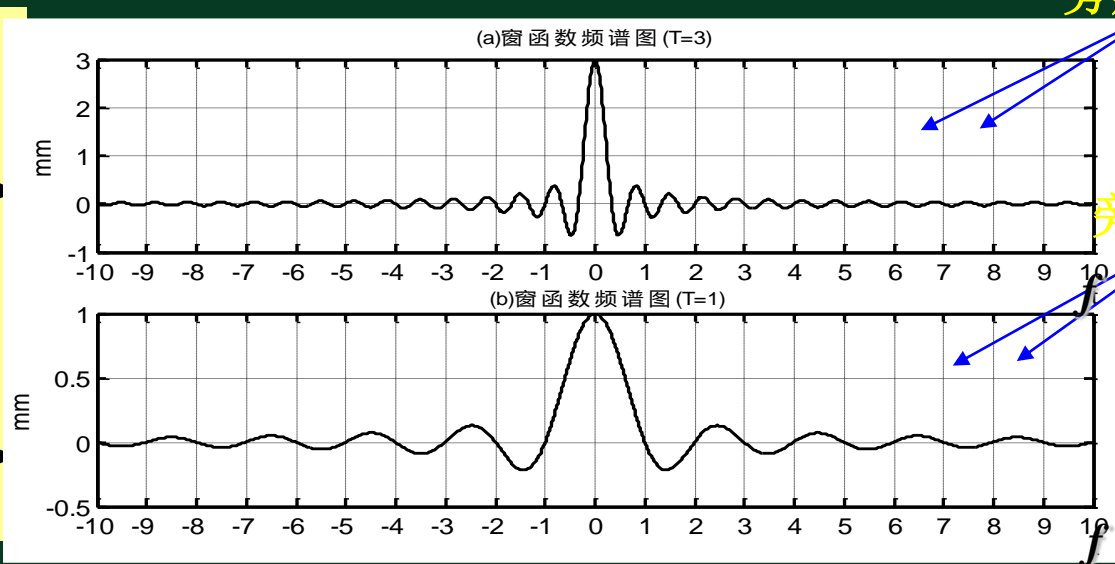
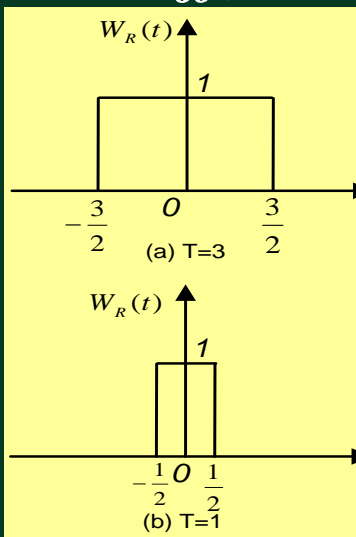
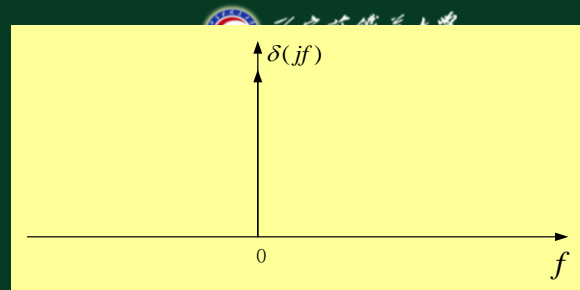
➤ $W_R(jf)$ 为一个无限带宽信号，其幅值随 f 逐渐衰减，这样频谱有**主瓣**和**旁瓣**。



矩形窗函数



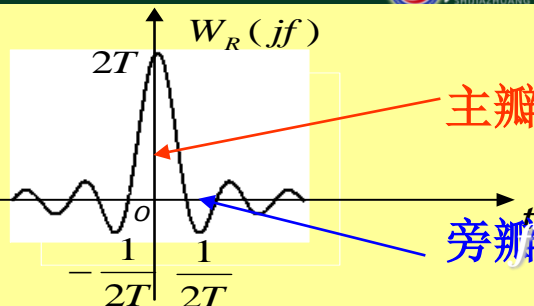
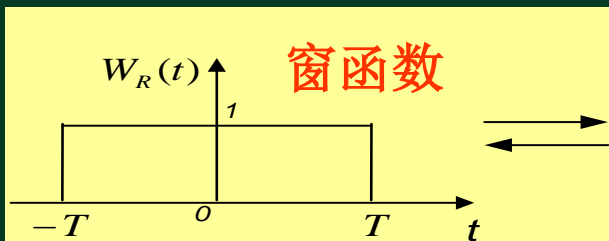
- 如果窗的宽度越大，即时间序列截取的越长，其频谱的**旁瓣**占的比例越小。
- 当窗口长度为无限大时，即截取所有的时间序列，则信号的频谱 $W_R(jf)$ 变为 $\delta(jf)$ ，即只有主瓣，而没有旁瓣。



旁瓣

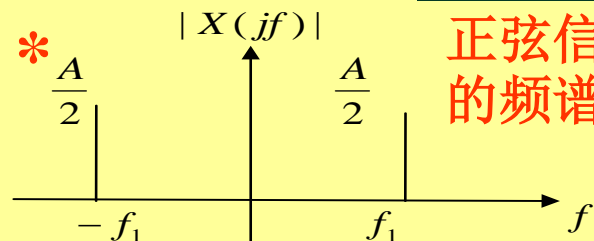
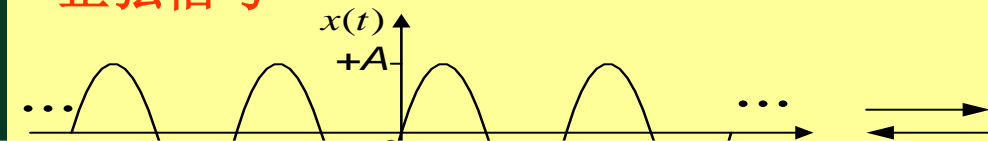
旁瓣

(2) 信号加窗分析与能量泄漏



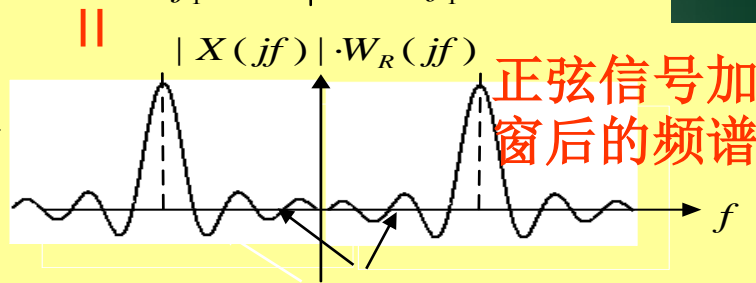
本课程
窗函数的
频率

正弦信号



正弦信号
的频谱

将截断信号谱 $|X(jf)W_R(jf)|$ 与原始信号谱 $X(jf)$ 相比较可知，它已不是原来的两条谱线，而是两段振荡的连续谱。原来集中在 f_1 处的能量被分散到两个较宽的频带中去了，这种现象称之为**频谱能量泄漏**。

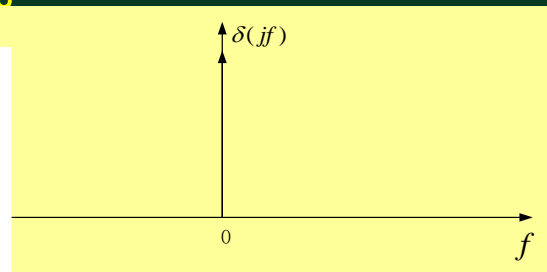
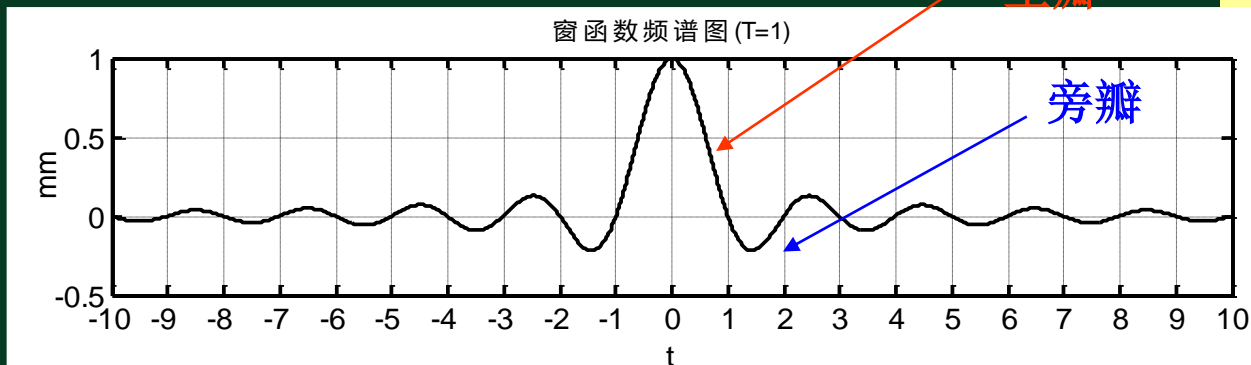


皱纹

周期信号截断后的频谱一定是连续谱

(3) 如何尽可能减少能量泄漏?

- 泄漏是不可避免的，因为任何的窗函数的频谱都不会变为 $\delta(jf)$
- 选择好的窗函数，尽可能减少能量的泄漏。



窗函数
评价标准

最大旁瓣值与主峰值之比

最大旁瓣值的倍频程衰减率

主瓣宽度

窄的主瓣提高频率分辨力

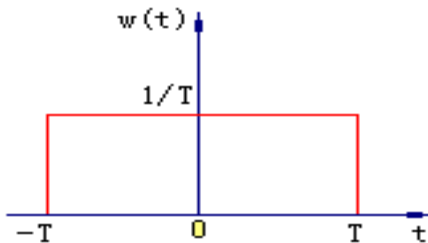
小的旁瓣可以减少泄露

(4).常用的窗函数

1) 矩形窗

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{2 \sin aT}{aT}$$

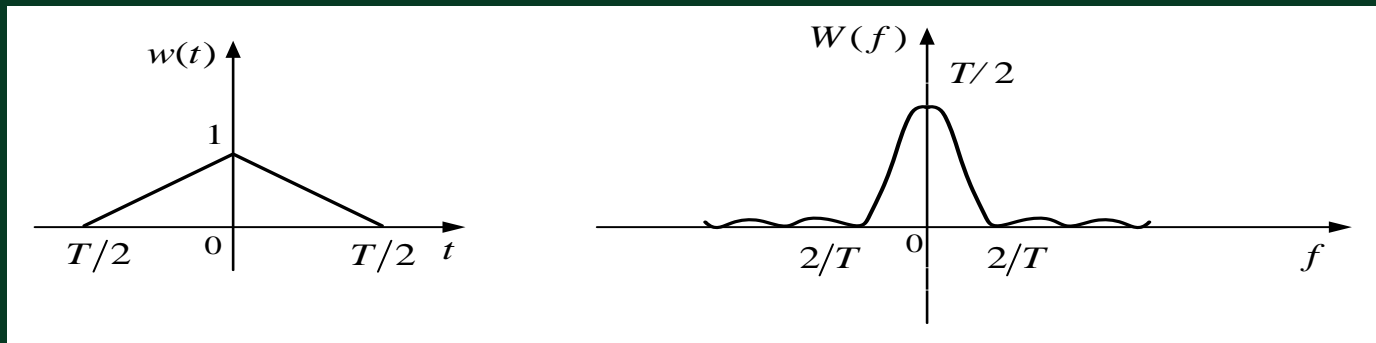


优点: **主瓣最窄**;

缺点: **旁瓣较高**, 并有负旁瓣, 导致变换中带进了高频干扰和能量泄漏, 甚至出现负谱现象.

主要应用在有**需要获得精确频谱主峰**的所在频率, 而对幅值精度要求不高的场合。

2) 三角窗

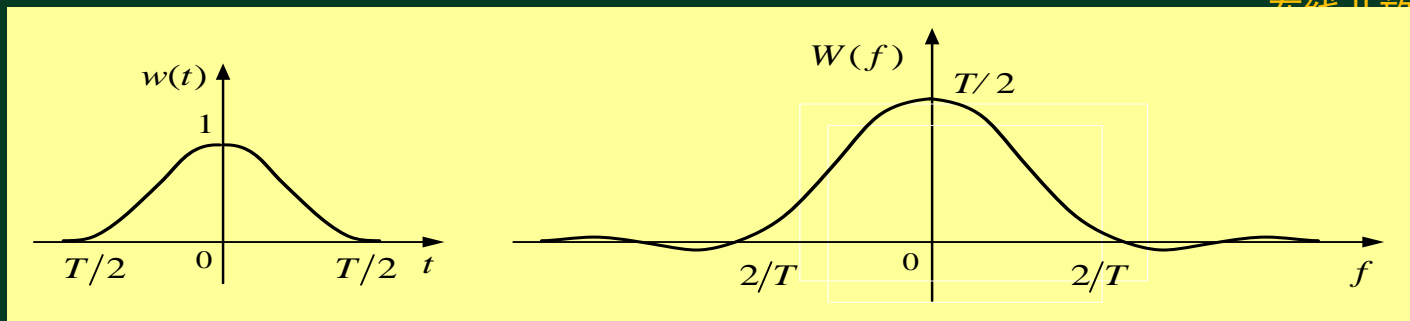


$$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{T}{2} \frac{\sin^2 \frac{\pi f T}{2}}{\left(\frac{\pi f T}{2}\right)^2} = \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$

三角窗与矩形窗比较，主瓣宽度约等于矩形窗的两倍，但旁瓣小，而且无负旁瓣，

3) 汉宁窗



$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} & |t| < T/2 \\ 0 & |t| \geq T/2 \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{1}{2} W_R(f) + \frac{1}{4} W_R(f + \frac{1}{T}) + W_R(f - \frac{1}{T})$$

汉宁窗与矩形窗对比，汉宁窗的主瓣加宽并降低，旁瓣则显著减小，汉宁窗的旁瓣衰减速度也较快。

从减小能量泄漏的观点出发，汉宁窗优于矩形窗。但汉宁窗主瓣加宽，相当于分析带宽加宽，致使频率分辨率下降。

主要应用在随机信号或非整周期截断周期函数时。

4. 频域采样、栅栏效应

频域采样是使频率离散化，在频率轴上等间距地取点的过程。而从数学处理上看，则是用采样函数去乘连续频谱。

依据 FT的卷积特性——频域相乘就等于时域做卷积

函数的卷积特性——时域作卷积就等于时域波形的周期延拓

频域采样和时域采样相似，在频域中用脉冲序列乘信号的频谱函数。

栅栏效应

采样的实质就是摘取采样点上对应的函数值，其效果有如透过栅栏的缝观看外景一样，只有落在缝隙前的少数景象被看到，其余景象都被栅栏挡住，视为零。这种现象称为**栅栏效应**。

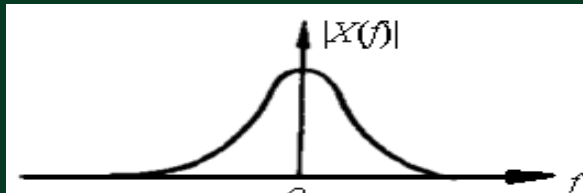
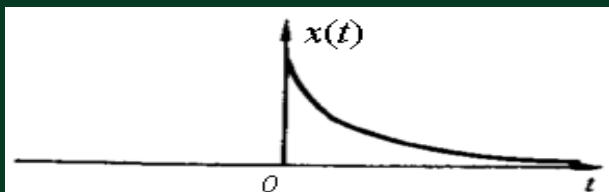
不管是时域采样还是频域采样，都有相应的栅栏效应。对比起来**时域采样**如满足采样定理要求，栅栏效应不会有什么影响。而**频域采样**的栅栏效应则**影响很大**，“挡住”或丢失的频率成分有可能是重要的或具有特征的成分，以致于整个处理失去意义。

采取措施

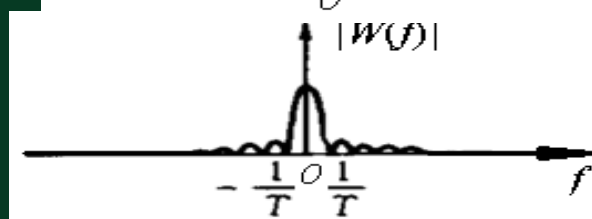
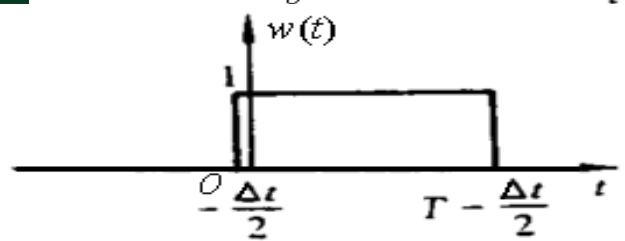
(1) 提高频率采样间隔，即提高频率分辨力，则栅栏效应中被挡住的频率成分越少。但同时 $\Delta f=1/T$ 是DFT算法固有的特征，在满足采样定理的情况下，这往往**加剧频率分辨力和计算工作量的矛盾**。

(2) 对周期信号实行**整周期截断**。

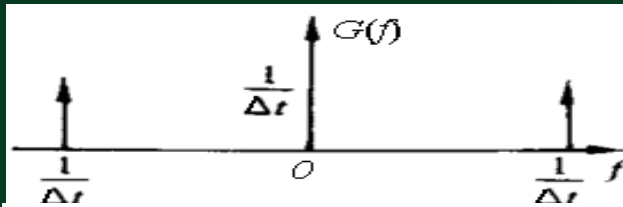
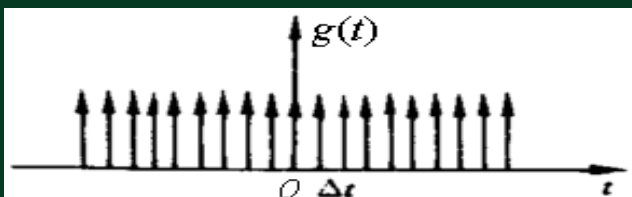
模拟信号



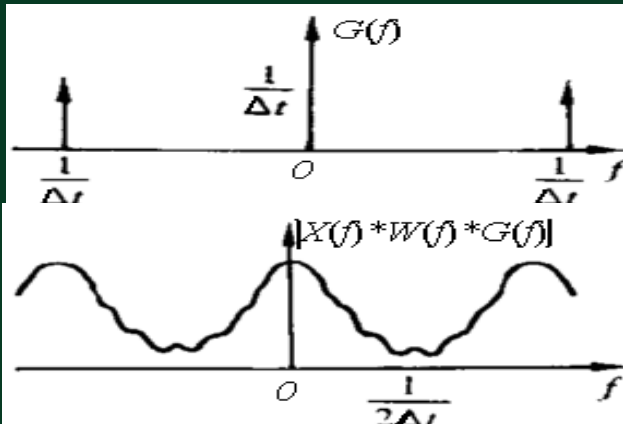
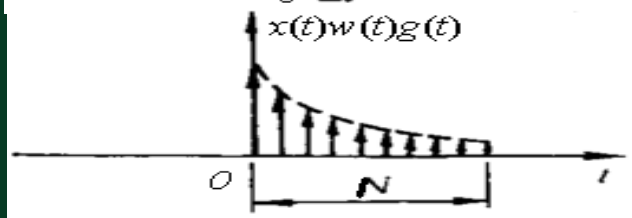
窗函数



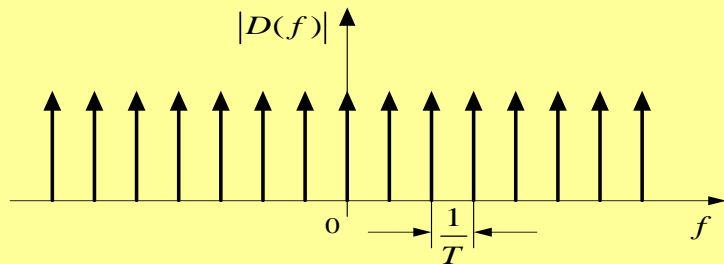
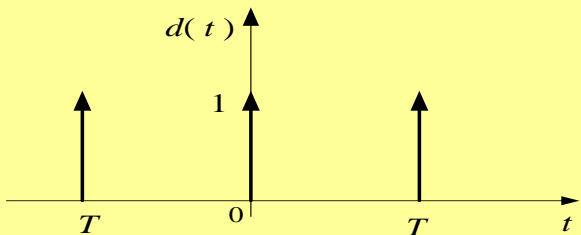
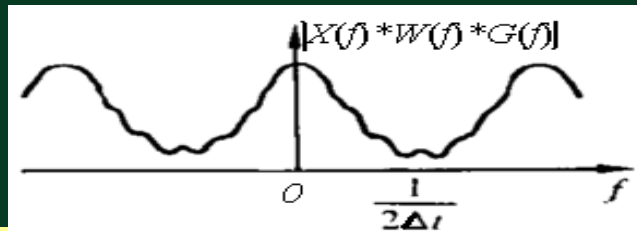
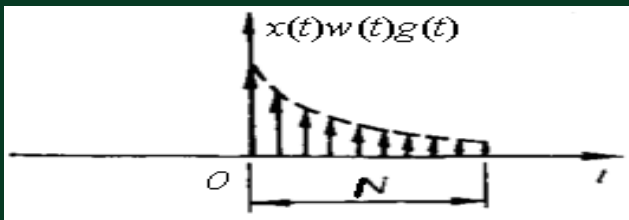
周期单位
脉冲序列



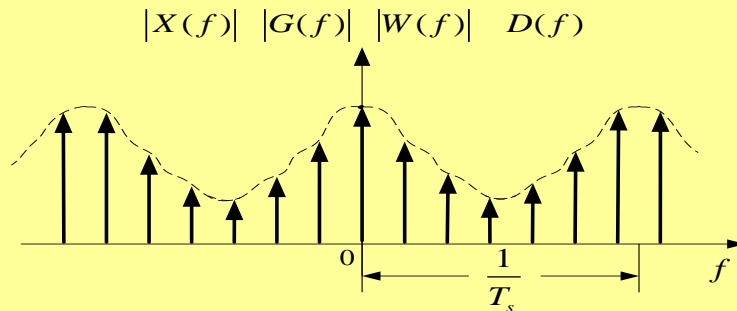
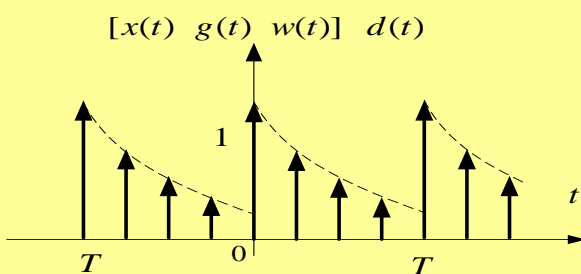
数字信号



数字信号



周期单位脉冲序列



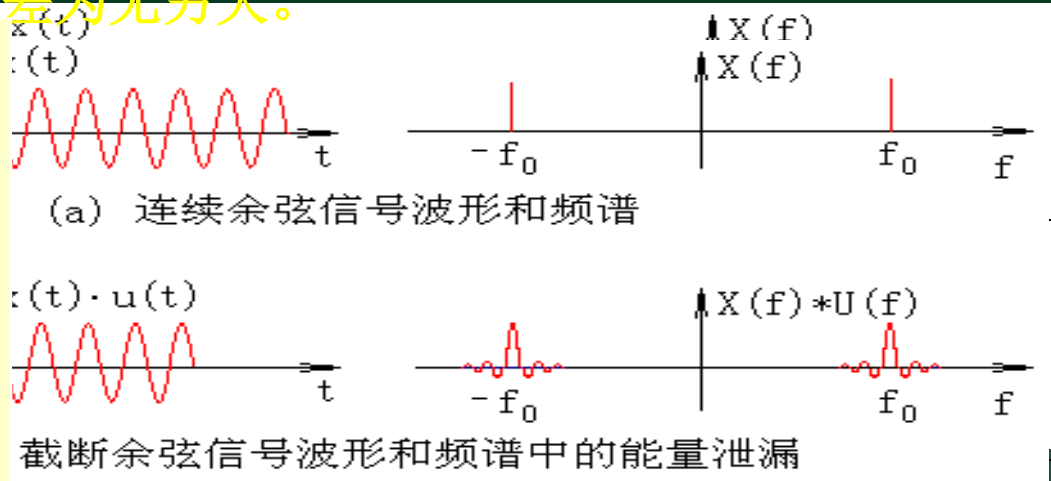
DFT后的频谱及其时域函数

能量泄漏与栅栏效应的关系

频谱的离散取样造成了栅栏效应，谱峰越尖锐，产生误差的可能性就越大。

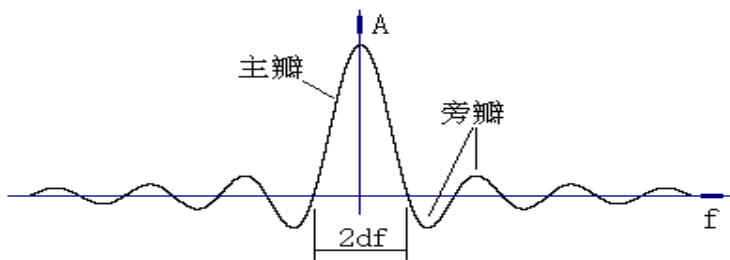
例如，余弦信号的频谱为线谱。当信号频率与频谱离散取样点不等时，栅栏效应的误差为无穷大。

从这个意义上来说，能量泄漏误差并不完全是有害的。如果没有信号时域截断产生的能量泄漏误差，频谱离散取样造成的栅栏效应误差将是不能接受的。

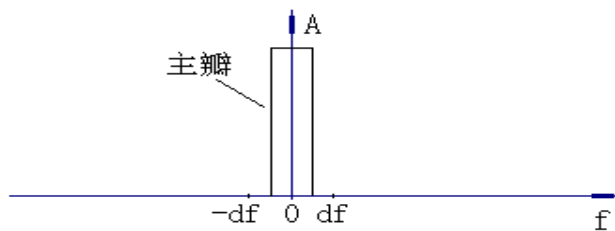


时域截断的原因，产生了能量泄漏，即使信号频率与频谱离散取样点不相等，也能得到该频率分量的一个近似值。

能量泄漏分主瓣泄漏和旁瓣泄漏，主瓣泄漏可以减小因栅栏效应带来的谱峰幅值估计误差，有其好的一面，而旁瓣泄漏则是完全有害的。



(a) 矩形窗函数的谱窗形状



(b) 理想时窗函数的谱窗形状

小结



在线开放课程

- 信号的截断、能量泄漏

