石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

信号的描述及其频谱分析

离散傅里叶变换（一）

主讲 ： 牛江川

4　离散傅里叶变换

傅里叶变换建立了信号的时域分析与频域分析的关系，但是由于其算法过于复杂、计算工作量太大等问题受到很大的应用限制。

随着数字计算技术的发展，数字信号分析技术得到越来越广泛的应用。

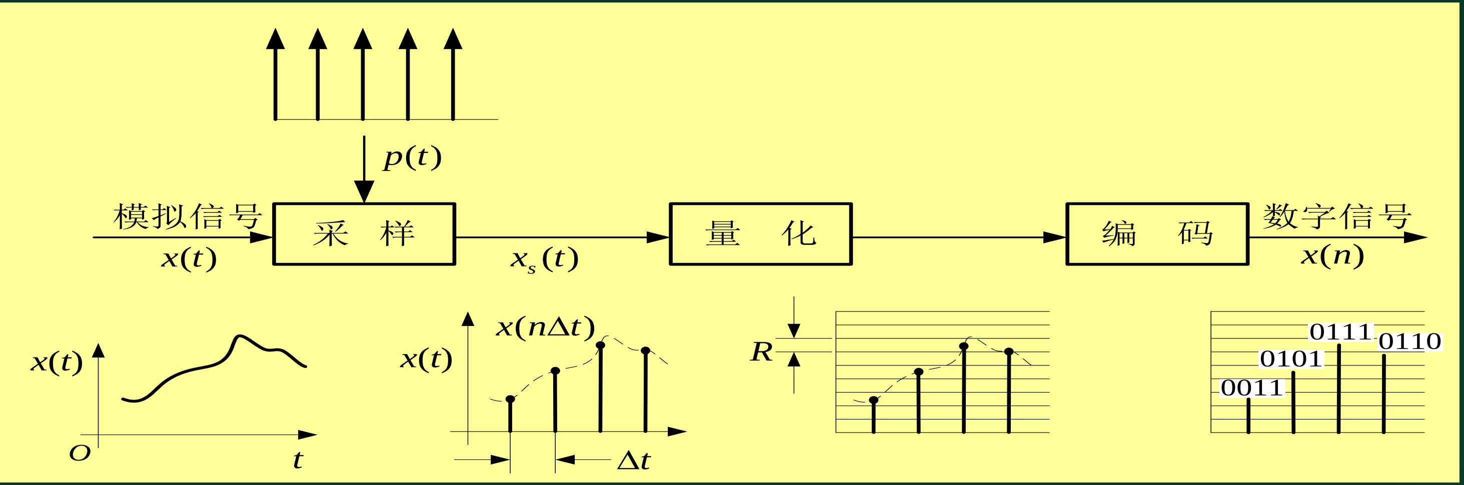
一、离散傅里叶变换的图解推演

对连续时间信号进行离散傅里叶变换，可分为三个步骤：时域采样、时域截断和频域采样。

1. 时域采样　模拟量转换为数字量的一般原理：

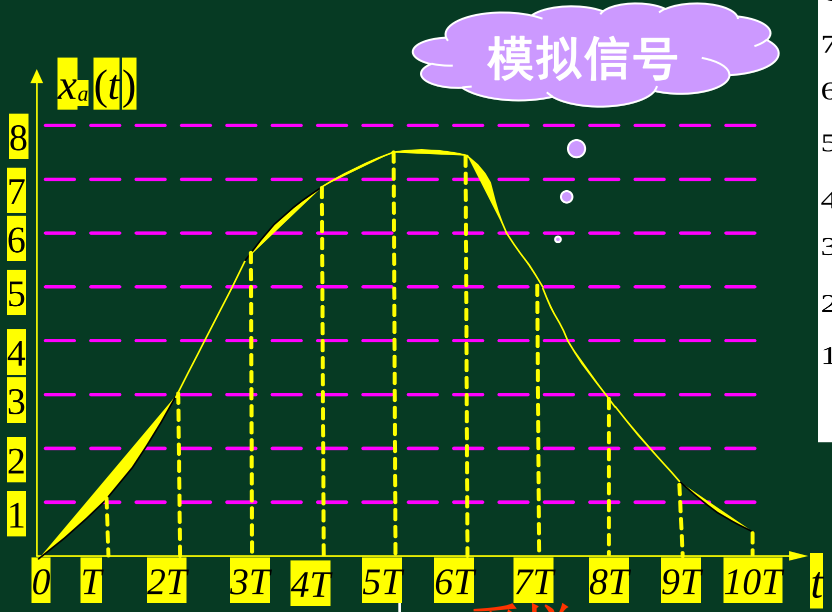
把连续时间信号转换为离散数字信号的过程称为模-数（A/D）转换过程；反之，则称为数-模（D/A）转换过程

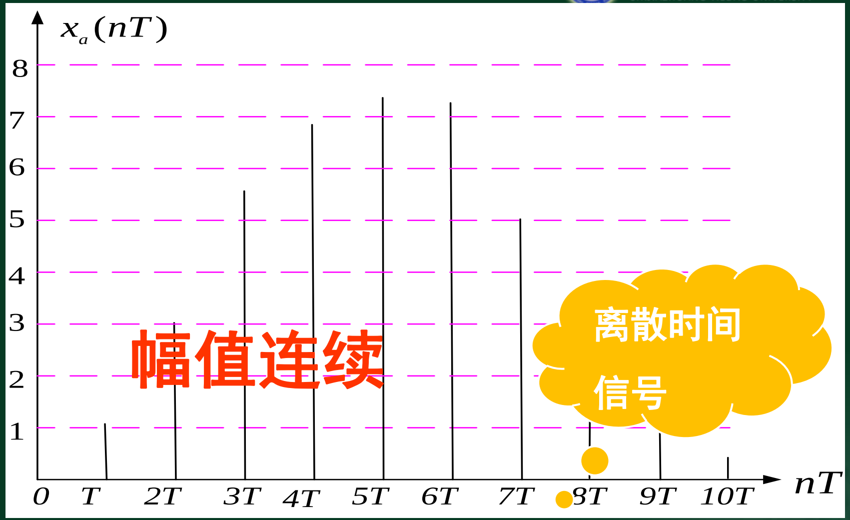
A/D转换过程包括了采样、量化、编码，其工作原理如下图所示



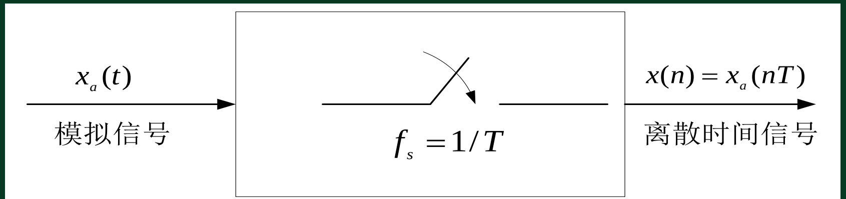
（1）采样

3.0129623....



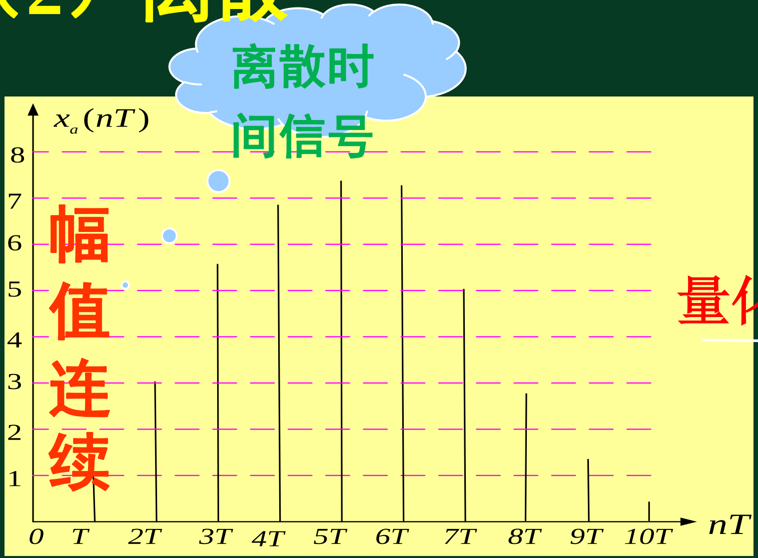


采样



时间离散

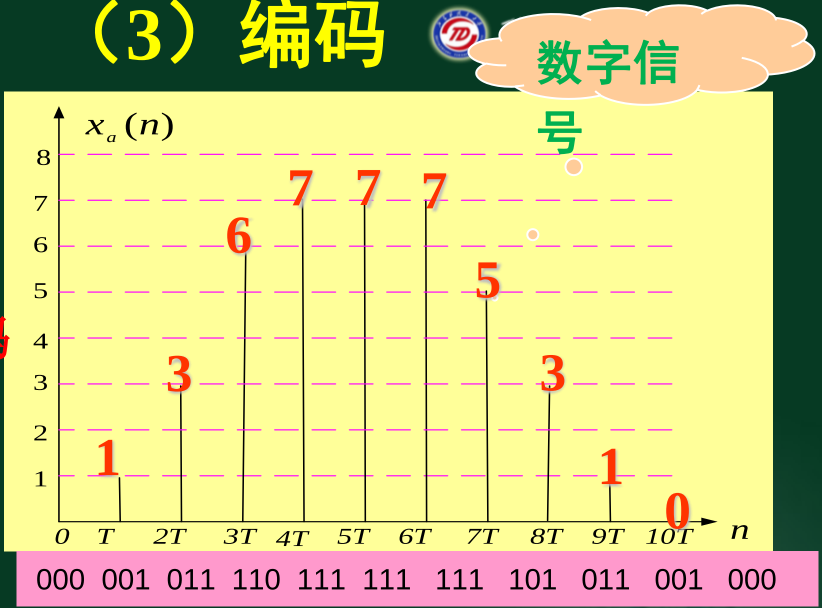
（2）离散



时间离散

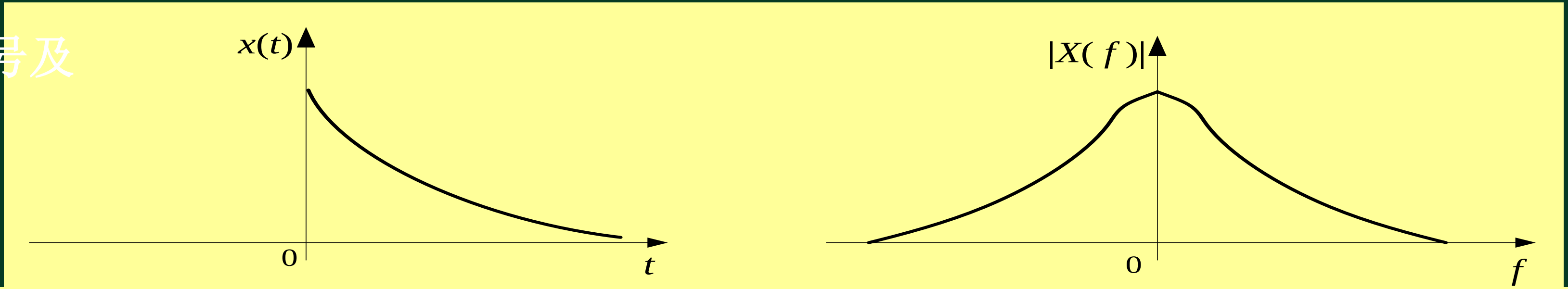
量化+编码

（3）编码

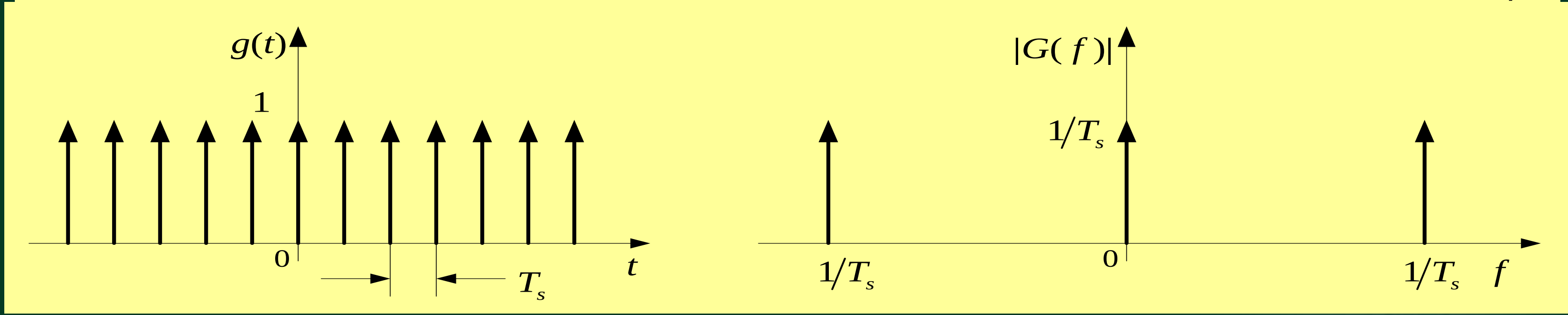


量化——把采样信号$x(nT_s)$经过**舍入**变为只有有限个有效数字的数，这一过程称为**量化**.

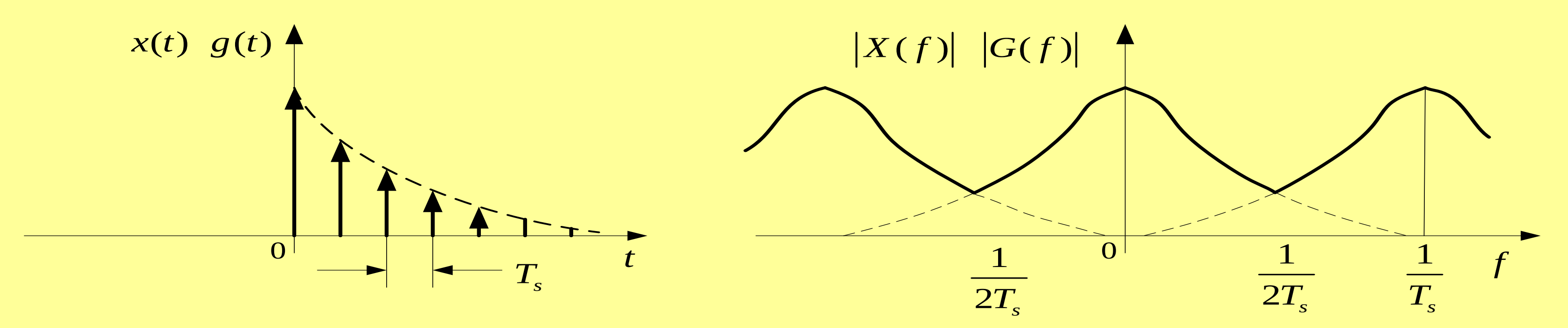
原模拟信号及其幅频谱



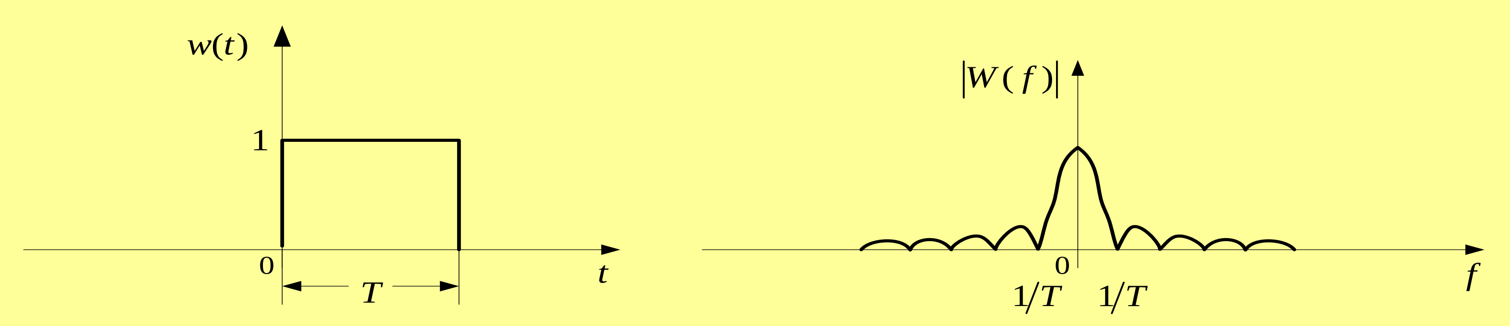
采样信号及其幅频谱



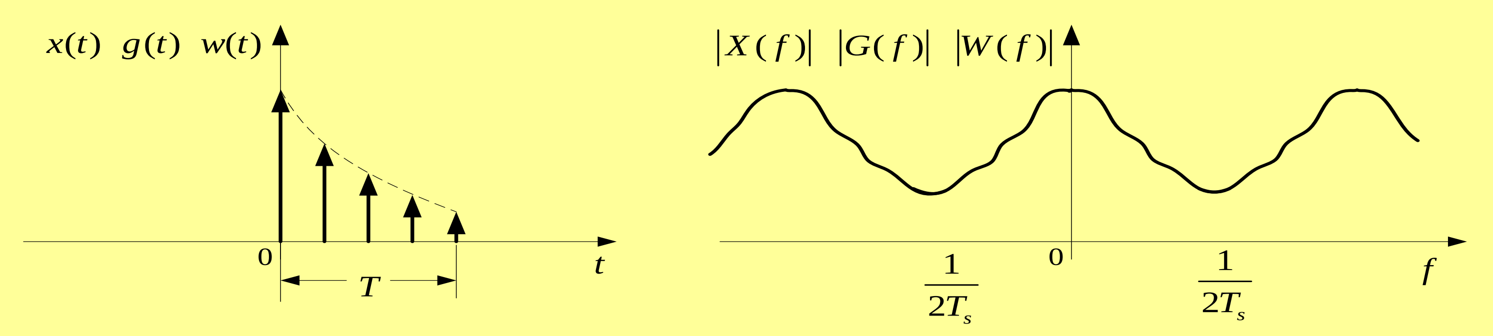
采样后信号及其幅频谱



2. 时域截断

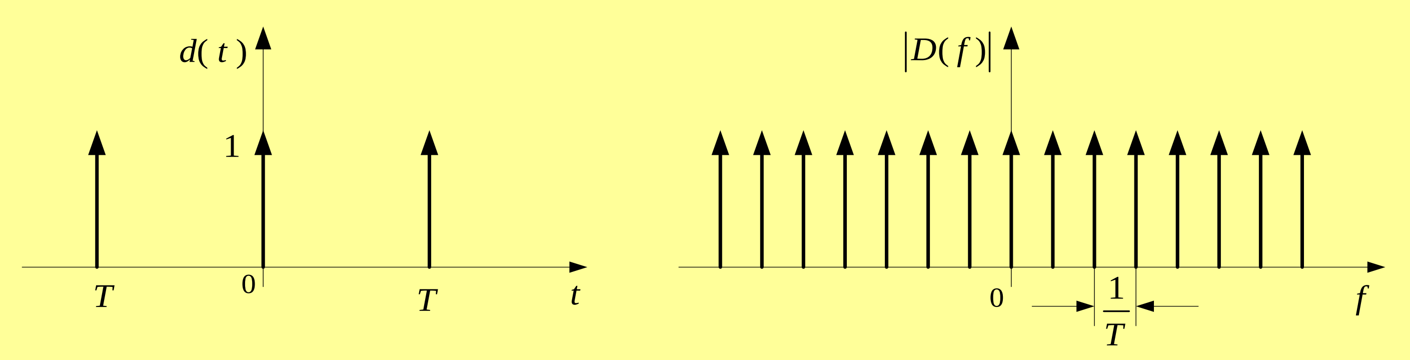


时窗信号及其幅频谱

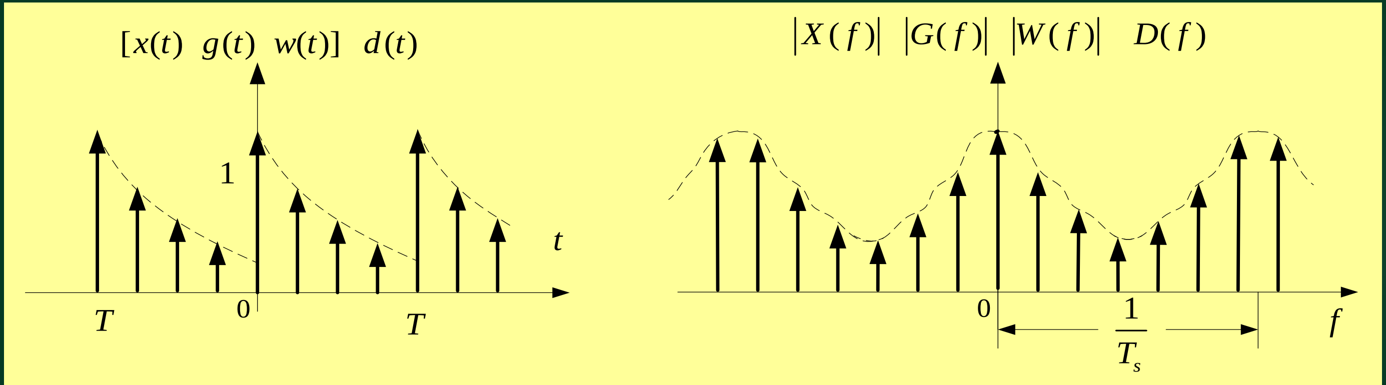


有限长离散信号及其幅频谱

3. 频域采样



频域采样信号及其时域函数



DFT后的频谱及其时域函数

二、离散傅里叶变换中的若干问题

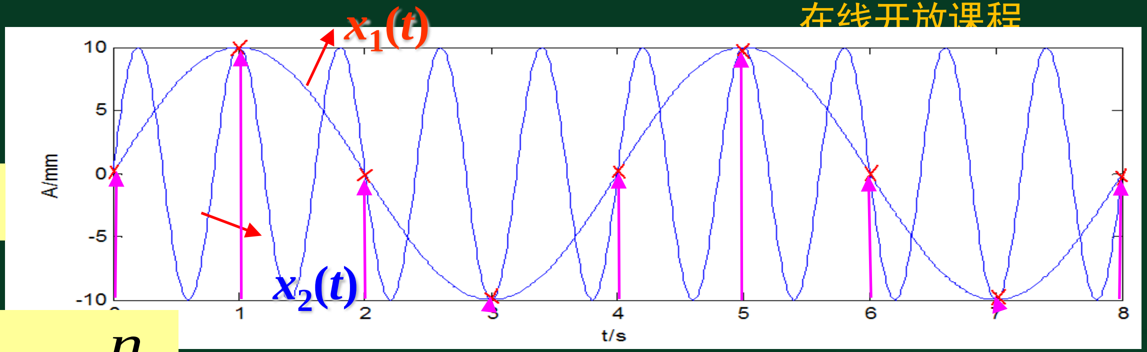
1. 时域采样、混叠和采样定理

采样是把连续时间信号变成离散时间序列的过程，就是等间距地取点。而从数学处理上看，则是用采样函数去乘连续信号。

采样是用一个等时距的周期脉冲序列s(t)去乘x(t)。

时距T_S称为采样间隔，$1/T_S=f_S$称为采样频率。

(1) 信号采样和混叠



$$x_1(t) = A\sin(2\pi 10t)$$

$$x_2(t) = A\sin(2\pi 50t)$$

采样频率 $f_s = 40Hz$

采样时间 $t = nT = \dfrac{n}{f_s} = \dfrac{n}{40}$

$$x_1(n) = A\sin(2\pi 10\frac{n}{40}) = A\sin(2\pi\frac{10}{40}n) = A\sin(\frac{\pi}{2}n)$$

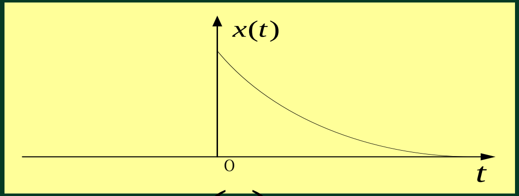
$$x_2(n) = A\sin(2\pi 50\frac{n}{40}) = A\sin(2\pi\frac{50}{40}n) = A\sin(\frac{5\pi}{2}n)$$

$$= A\sin(\frac{\pi}{2}n)$$

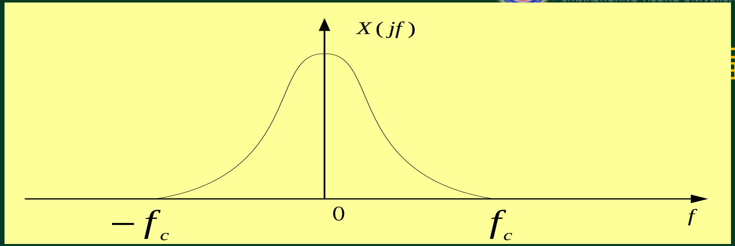
$$x_2(n) = x_1(n)$$

按此采样频率，两个信号数字信号相同

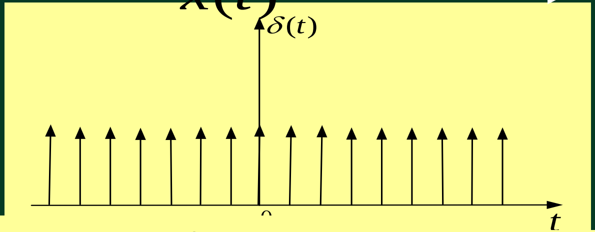
（2）信号混叠——理论分析



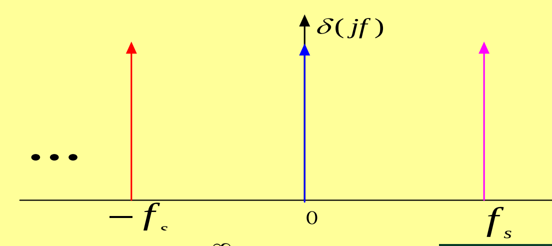
(a)



$x(t) \rightarrow X(jf)$

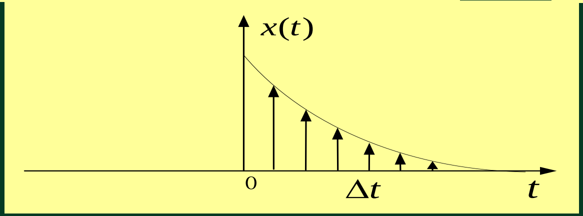


(b)

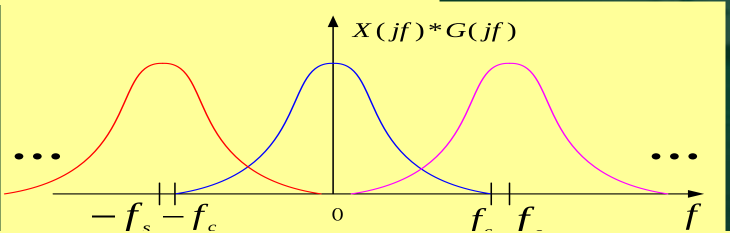


$$f_s=\frac{1}{T_s}$$

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \rightarrow G(jf)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$$



(c)



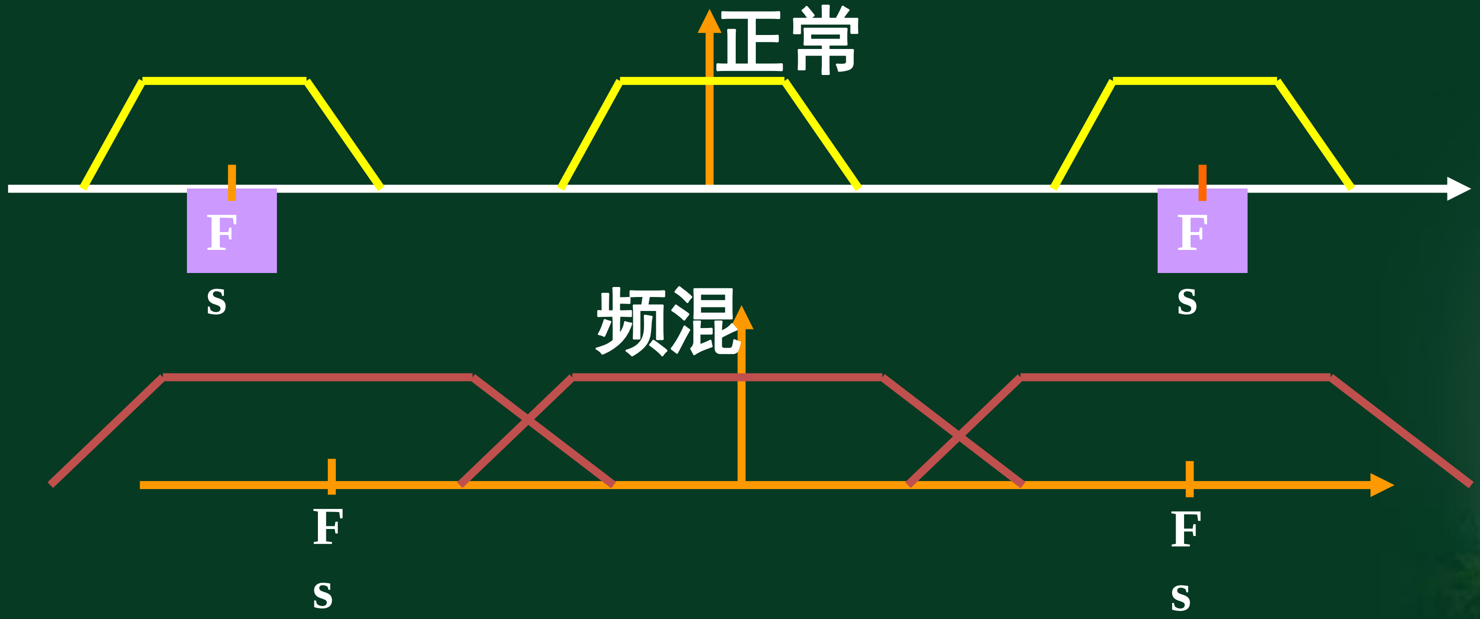
$$x(n)=x(t)\cdot g(t)$$

$$X(jf)*G(jf)=X(jf)*f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)=f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f-nf_s)$$

产生混叠的原因

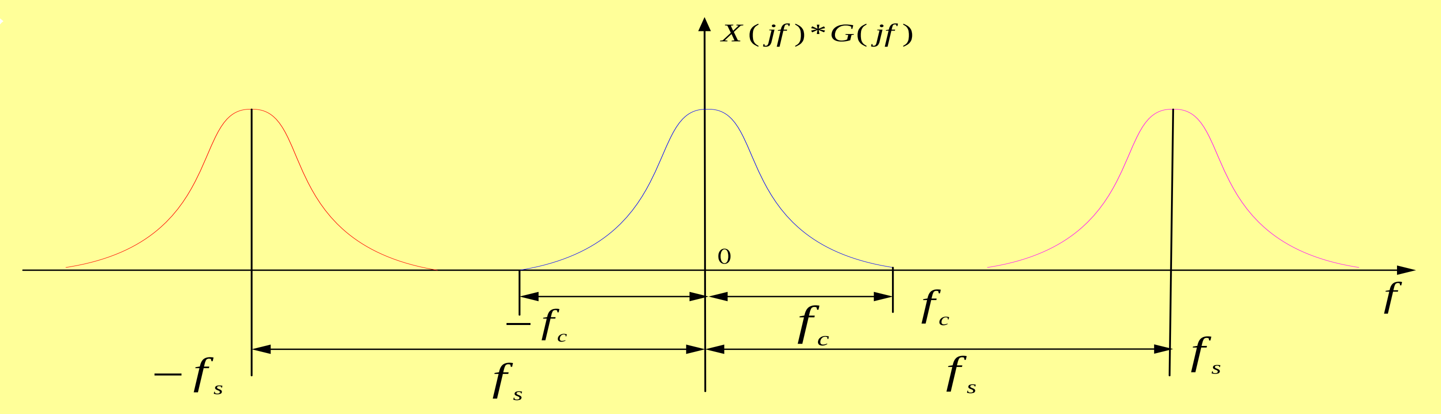
（1）、采样频率 f_s 太低

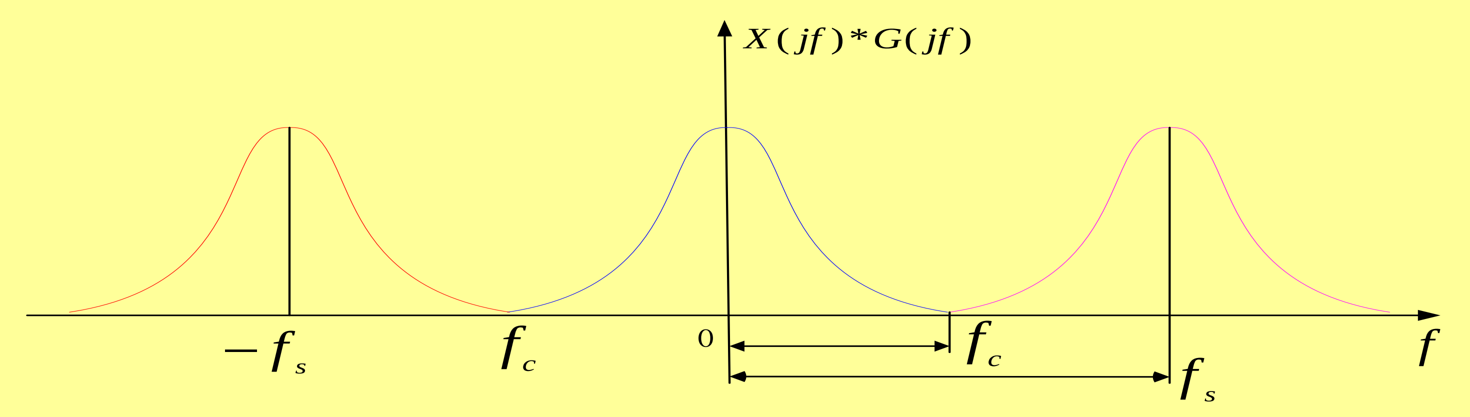
（2）、原模拟信号不是有限带宽的信号，即 $f_{max} \rightarrow \infty$



不生产混频的条件：

$f_s \geq 2f_c$

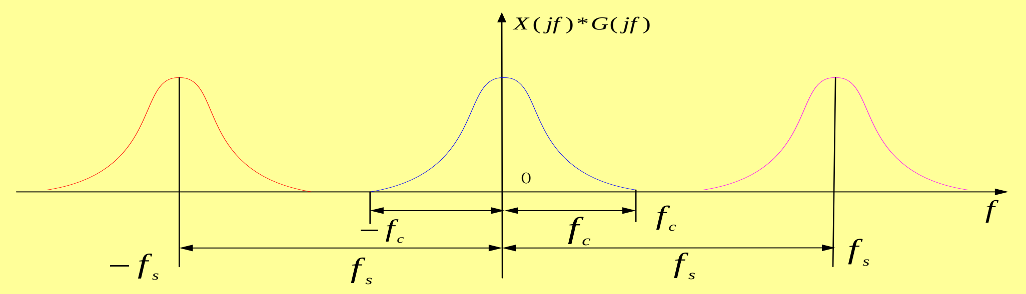




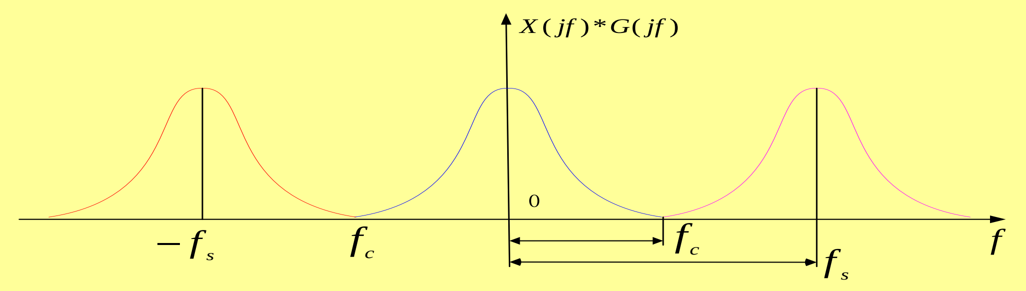
（3）采样(香农）定理

➢若模拟信号$x(t)$为有限带宽信号，其最高频率为f_c，为了避免混叠，以使采样处理后仍有可能恢复原信号，则采样频率f_s必须大于或等于最高频率f_c的两倍，即

$$f_s \geq 2f_c$$



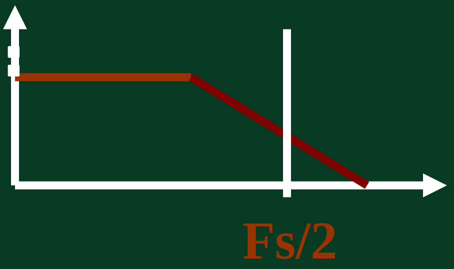
➢对研究对象**感兴趣的频率**可能远小于研究对象的最高频率f_c，这样，在信号采集之前用一个**抗混频滤波器**，把不感兴趣的频率成分先滤掉。



采取措施

（1）对非有限带宽的模拟信号，在采样之前先通过模拟低通滤波器滤去高频成分，使其成为带限信号。这种处理称为**抗混叠滤波预处理**。

工程处理：



（2）满足采样定理.

2. 量化和量化误差

时域采样只是把连续信号的时间离散化了。而对于幅值如果用二进制数码组来表示，就是离散信号变成数字信号。这一过程称为量化。量化一般是由A/D转换器来实现的。

量化误差分析

设A/D转换器的位数为b，允许的动态工作范围为D，则相邻量化电平之差

$$\Delta x = \frac{D}{2^{b-1}}$$

（由于实际上字长的……符号位），

每个量化电平对应一个二进制数码。若采样点的电平落在两相邻量化之间，就必须含入到相近的一个量化电平上。

量化误差 $\varepsilon(n) = x(n)_{实际} - x(n)_{量化电平}$

是指采样点的实际电平与量化电平之间的差值。

采取措施

（1） 提高A/D转换的位数，既降低了量化误差，但A/D转换的位数选择应视信号的具体情况和量化的精度要求而定，位数增多后，成本显著增加，转换速率下降。

（2）实际上，和信号获取、处理的其他误差相比，量化误差通常不大，所以一般可忽略其影响。

小结

- **离散傅里叶变换**