石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

信号的描述及其频谱分析

瞬态信号与连续频谱

主讲 ： 牛江川

频谱密度函数的概念

设有一周期函数*x(t)*，将其展开成指数形式的傅里叶级数，即：

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}$$

则其复振幅为

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

当T→∞时，$|C_n|\to 0$，两端同时乘以T，则

$$TC_n=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$C_n \cdot T$ 可望趋于有限值，且为一个连续函数，通常

记为$X_n(\omega)$，即

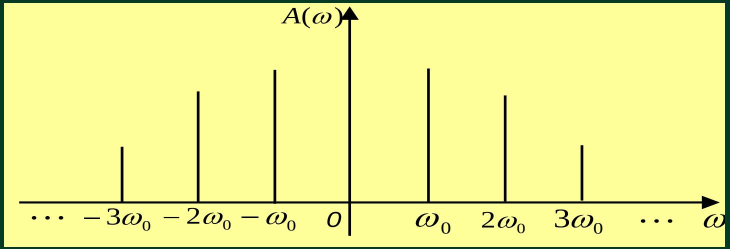
$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} TC_n = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

称之为频谱密度函数。

1.傅立叶变换

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



- ✓ 把非周期信号： →周期$T_0\rightarrow\infty$的周期信号
- ✓ 周期信号$x(t)$，周期为T_0，则其频谱是离散谱，而相邻谐波之间的频率间隔为$\Delta\omega=\omega_0=2\pi/T_0$。
- ✓ 当$T_0\rightarrow\infty$，则$\omega_0=\Delta\omega\rightarrow0$，

→信号频谱谱线间隔$\Delta\omega=\omega_0\rightarrow0$，无限缩小，

→相邻谐波分量无限接近，

→离散参数$n\omega_0$可用连续变量ω来代替，

→离散频谱变成了连续频谱，

→求和运算可用积分运算来取得，

- ✓ 所以非周期信号的频谱是连续的。

✓ 周期信号$x(t)$，在$[-T_0/2, T_0/2]$区间内

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

式中，

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)e^{jn\omega_0 t}$$

当$T_0\to\infty$时， ①积分区间由$[-T_0/2,T_0/2]$变为$(-\infty,\infty)$；

② $\omega_0=2\pi/T_0\to0$， →离散频率$n\omega_0$→连续变量ω。

当$T_0\to\infty$时，①积分区间由$[-T_0/2,T_0/2]$变为$(-\infty,\infty)$；

② $\omega_0=2\pi/T_0\to 0$，$\to$离散频率$n\omega_0\to$连续变量ω。

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right)e^{j\omega t}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right)e^{j\omega t}d\omega$$

称为傅里叶积分。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

一般为复数，用X(ω)表示为：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

X(ω)称为信号x(t)的傅立叶变换。

✓ **X(ω)为单位频宽上的谐波幅值，具有“密度”的含义，故把X(ω)称为瞬态信号的“频谱密度函数”，或简称“频谱函数”。**

2.傅立叶逆变换

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$x(t)$为$X(\omega)$的傅立叶逆变换（反变换）

3.傅立叶变换对

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)\underset{IFT}{\overset{FT}{\Longleftrightarrow}}X(\omega)$$

✓ 由于ω=2πf

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\cdot e^{j2\pi ft}df$$

$$X(f)=|X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

$$|X(f)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2[X(f)]+\mathrm{Im}^2[X(f)]}$$

$$\varphi(f)=\arctan\frac{\mathrm{Im}[X(f)]}{\mathrm{Re}[X(f)]}$$

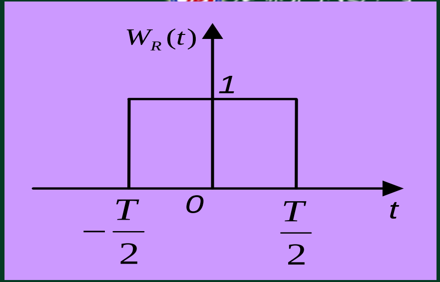
$|X(f)|$ -f **连续幅值谱**

$\varphi(f)$ -f **连续相位谱**

例2-6:矩形窗函数$W_R(t)$的频谱

矩形窗函数

$$W_R(t)=\begin{cases}0 & (t<-T/2)\\ 1 & (-T/2<t<T/2)\\ 0 & (t>T/2))\end{cases}$$



矩形窗函数

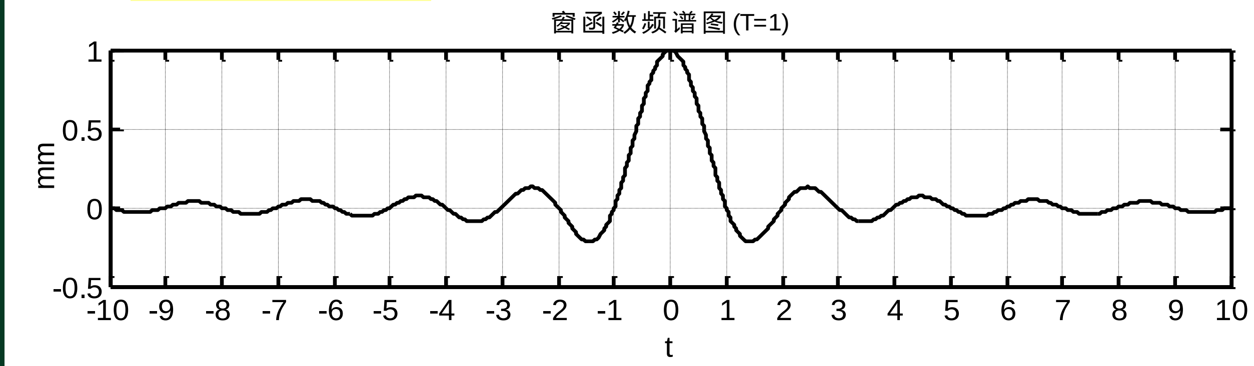
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$W_R(f)=\int_{-\infty}^{\infty}W_R(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}1\cdot e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j\pi fT}-e^{j\pi fT})=T\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}$$

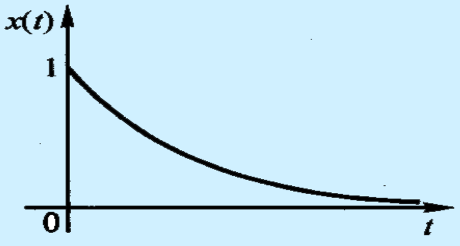
$$=T\sin C(\pi fT)$$



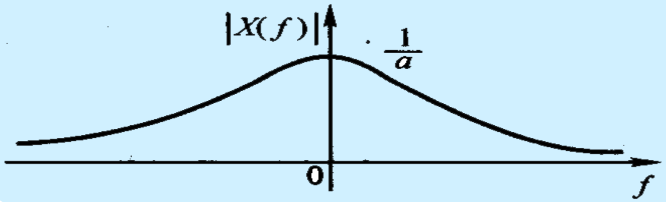
例2-7：单边指数衰减函数的频谱

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-at} & t\geqslant 0,\ a>0\end{cases}$$

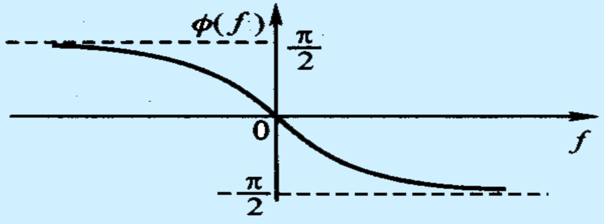
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt=\frac{1}{(a+j2\pi f)}=\frac{a-j2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}$$



a) 时域图形



b) 幅频图



c) 相频图

4.周期和非周期信号幅值谱的区别

非周期信号幅值谱$|X(f)|$与周期信号幅值谱$|C_n|$之间的区别：

- ①$|X(f)|$为连续频谱，而$|C_n|$为离散频谱；
- ②$|C_n|$的量纲和信号幅值的量纲一致，

即cm(振幅)，而$|X(f)|$的量纲相当于$|C_n|/f$，为单位频宽上的幅值，即“频谱密度函数”，cm/Hz（振幅/频率）。

5.傅立叶变换的主要性质

(1).奇偶虚实性

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos 2\pi ftdt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin 2\pi ftdt$$
$$=R_eX(f)+jI_mX(f)$$

a.若x(t)是实函数，则X(*f*)是复函数；

b.若x(t)为实偶函数，则ImX(*f*)=0，

而X(*f*)是实偶函数，即*X*(*f*)= *ReX*(*f*)；

c.若x(t)为实奇函数，则ReX(*f*)=0，

而X(*f*)是虚奇函数，即X(-*f*)＝-j ImX(*f*)；

d.若x(t)为虚偶函数，则ReX(*f*)=0，而X(*f*)是虚偶函数；

e.若x(t)为虚奇函数，则ImX(*f*)=0，而X(*f*)是实奇函数。

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

(2).对称性

若:(时域信号) $x(t) \leftrightarrow X(f)$ (频域信号)，则

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

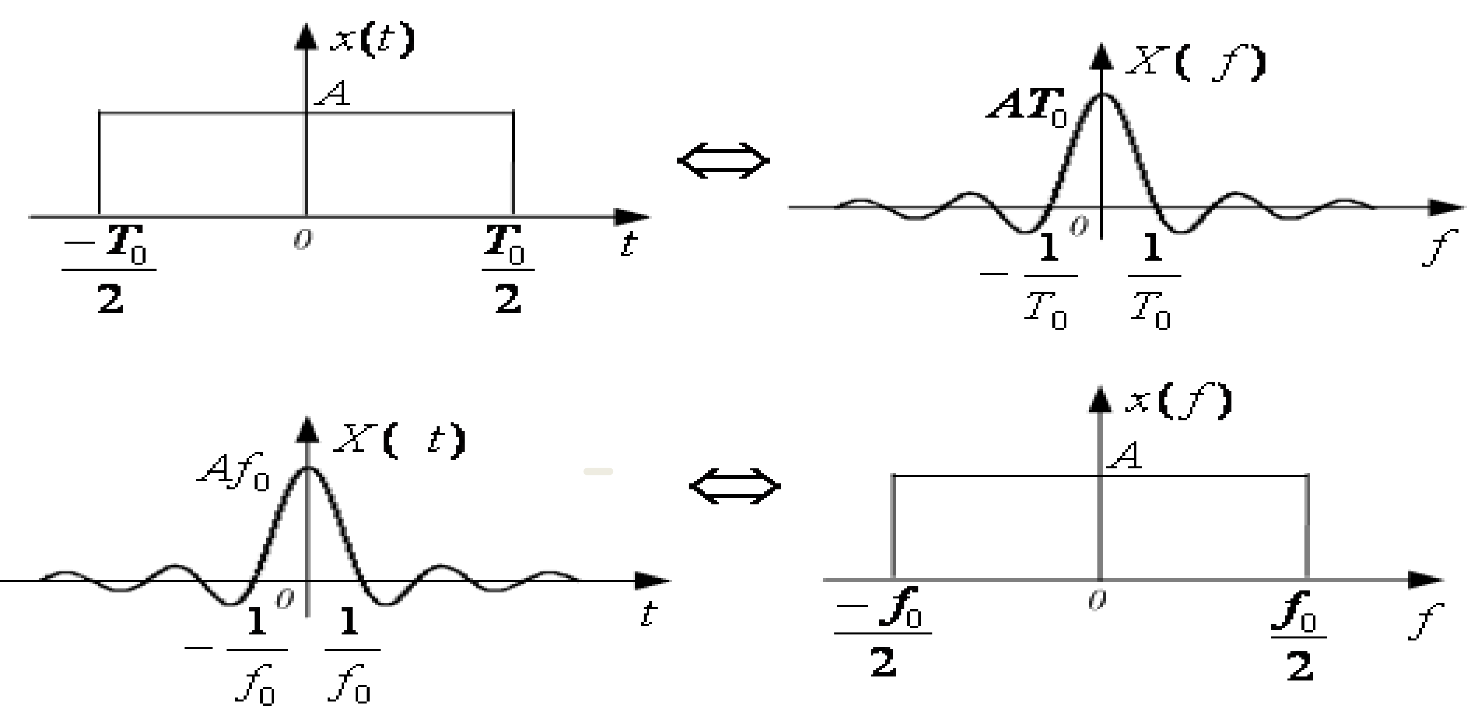
由于 $$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

若以$-t$代替t，有

$$x(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

再将t与f互换，则有

$$x(-f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t = F[X(t)]$$


x(t)
A
-T0/2
0
T0/2
t
⇔
X(f)
AT0
0
-1/T0
1/T0
f
X(t)
Af0
0
-1/f0
1/f0
t
⇔
x(f)
A
-f0/2
0
f0/2
f

(3).尺度特性

若$x(t) \leftrightarrow X(f)$，则

$$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

若k为大于零的常数，则

$$F\left[x(kt)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-j2\pi \frac{f}{k}(kt)} \mathrm{d}(kt) = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

信号持续时间压缩k倍$(k>1)$，则信号的频宽扩宽k倍，而幅值变为原来的$1/k$。

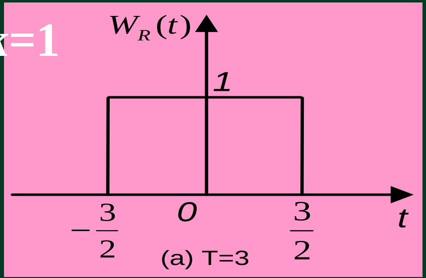
$$W_R(t)=\begin{cases}0 & (t<-T/2)\\ 1 & (-T/2<t<T/2)\\ 0 & (t>T/2))\end{cases}$$

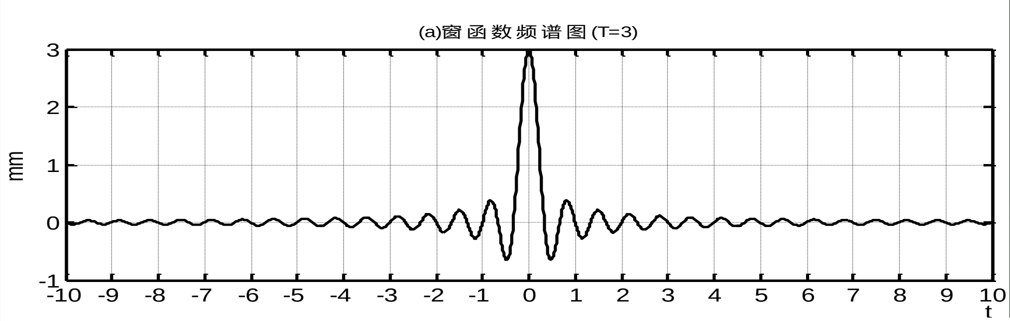
$$W_R(f)=T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

T为窗的宽度

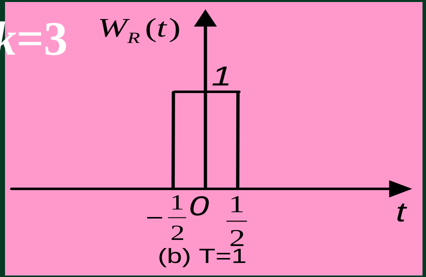
信号持续时间压缩k倍(k>1)，则信号的频宽扩宽k倍，而幅值变为原来的1/k。

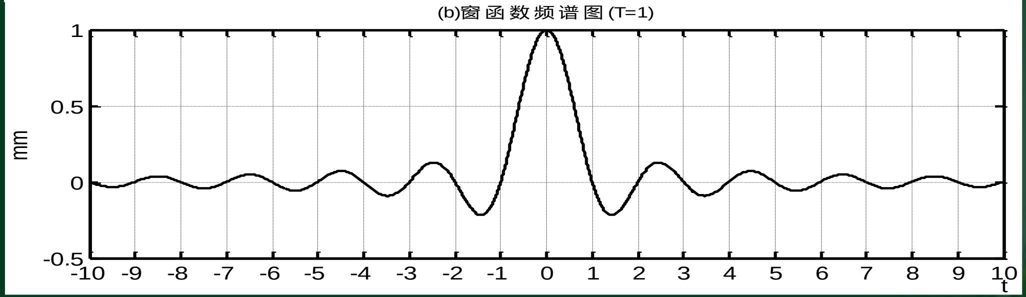
k=1





k=3





(4).时移、频移特性

➤若$x(t) \boxed{\leftrightarrow} X(f)$，则在时域中信号沿时间轴平移一常值$t_0$，则（时移）

$$x(t \pm t_0) \overset{\text{对应}}{\Longleftrightarrow} X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$$

$$F\left[x(t \pm t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t \pm t_0)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t \pm t_0)e^{-j2\pi f(t \pm t_0)}e^{\pm j2\pi f t_0}\mathrm{d}(t \pm t_0)$$

$$= X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$$

如果信号在时域中延迟了时间t_0，其频谱幅值不会改变，而相频谱中各次谐波的相移$-2\pi f\ t_0$，与频率成正比。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY 在线开放课程

➢在频域中信号沿频率轴平移一常值 f_0，则（频移）

$$X(f \pm f_0) \Leftrightarrow x(t)e^{\mp j2\pi f_0 t}$$

$$F^{-1}[X(f \pm f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f \pm f_0)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f \pm f_0)e^{j2\pi(f \pm f_0)t}e^{\mp j2\pi f_0 t}\mathrm{d}f$$

$$= x(t)e^{\mp j2\pi f_0 t}$$

若频谱沿频率轴平移一个常值 f_0，对应的时域函数将乘因子 $e^{\mp j2\pi f_0 t}$。

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

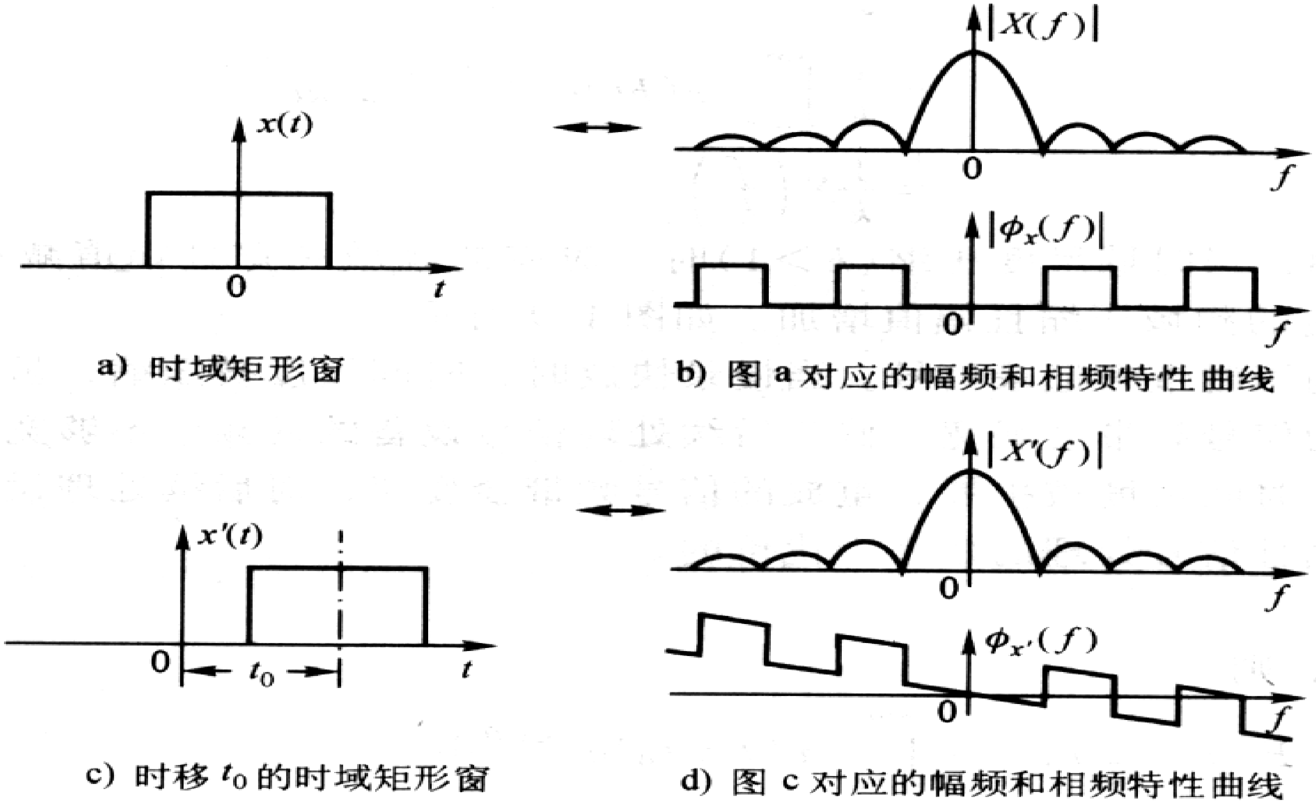


图 1.10　时移性质举例

(5).卷积特性

对于任意两个函数$x_1(t)$和$x_2(t)$，定义它们的卷积为：

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

若$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$，$x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$， 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) X_2(f)$$

$$x_1(t)\, x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

1.两个函数在时域中的卷积，对应于频域中的乘积

2.两个函数在时域中的乘积，对应于频域中的卷积

(6).线性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega),\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega),$

且设a_1, a_2为常数，则有

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 f_1(j\omega) + a_2 f_2(j\omega)$$

性　质	时　域	频　域
函数的奇偶虚实性	实偶函数	实偶函数
	实奇函数	虚奇函数
	虚偶函数	虚偶函数
	虚奇函数	实奇函数
线性叠加	$ax(t)+by(t)$	$aX(f)+bY(f)$
对　称	$X(\pm t)$	$x(\mp f)$
尺度改变	$x(kt)$	$\frac{1}{k}X\left(\frac{f}{k}\right)$
时　移	$x(t\pm t_0)$	$X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

石家庄铁道大学

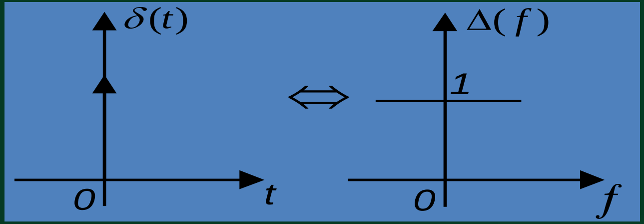
在线开放课程

性　质	时　域	频　域
频　移	$x(t)e^{\mp j2\pi f_0 t}$	$X(f \pm f_0)$
翻　转	$x(-t)$	$X(-f)$
共　轭	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f)X_2(f)$
频域卷积	$x_1(t)x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$
时域微分	$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
频域微分	$(-j2\pi t)^n x(t)$	$\dfrac{d^n X(f)}{df^n}$
积　分	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\dfrac{1}{j2\pi f}X(f)$

6.几种典型信号的频谱

6.1 单位脉冲函数δ(t) 的频谱

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=e^{0}=1$$



δ函数的频谱

可见，冲激函数$\delta(t)$的频谱是常数1。也就是说，$\delta(t)$中包含了所有的频率分量，而各频率分量的频谱密度都相等。显然，信号$\delta(t)$实际上是无法实现的。

傅里叶变换对

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

时域	频域
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f t_0}$	$\delta(f-f_0)$

6.2 正、余弦函数的频谱

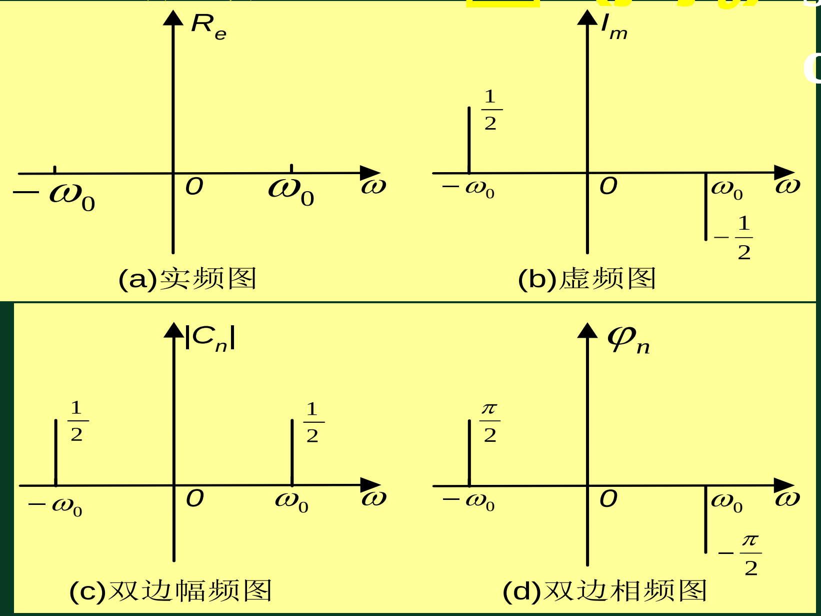
$$\sin 2\pi f_o t = j/2\left(e^{-j2\pi f o t} - e^{j2\pi f o t}\right)$$

$$\cos 2\pi f_o t = 1/2\left(e^{-j2\pi f o t} + e^{j2\pi f o t}\right)$$

根据 $e^{j2\pi f 0t} \boxed{\leftrightarrow} \delta(f - f_0)$

$$\sin 2\pi f_o t \boxed{\leftrightarrow} j/2[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$$

$$\cos 2\pi f_o t \boxed{\leftrightarrow} 1/2[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$$

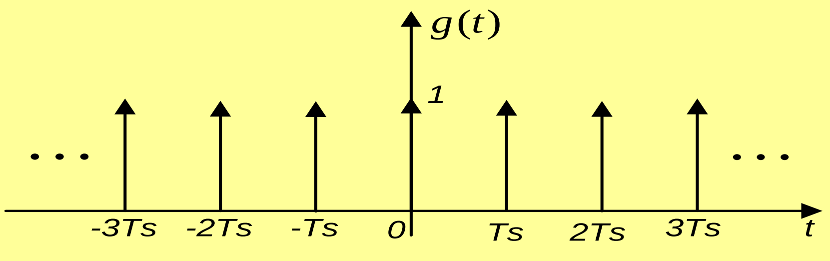


正弦函数的频谱

6.3 周期单位脉冲序列的频谱

相等间隔的周期单位脉冲序列，常称为**梳状函数**

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$



(a)周期单位脉冲序列

式中，T_s—周期，n—整数，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$。

➤为周期函数，而$f_s=1/T_s$，

用傅立叶级数的复指数形式表示：

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi n f_s t}$$

$$C_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}g(t)e^{-j2\pi n f_s t}dt=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-j2\pi n f_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

$$g(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi nf_s t}$$

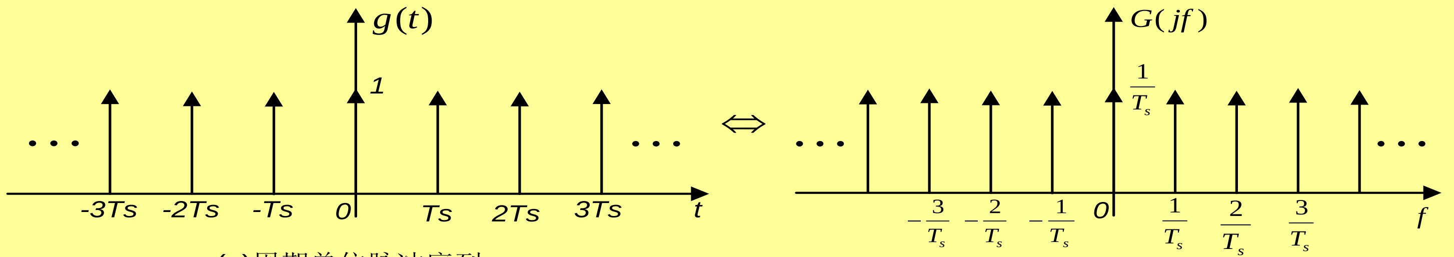
$f_s=1/T_s$,

$e^{j2\pi f_0 t} \boxed{\leftrightarrow} \delta(f-f_0)$

进行傅立叶变换:

$$G(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

- ✓ 时域中，序列的周期为T_s，频域中，序列的周期为$1/T_s$。
- ✓ 时域中，幅值为1　　　　频域中，幅值为$1/T_s$



(a)周期单位脉冲序列

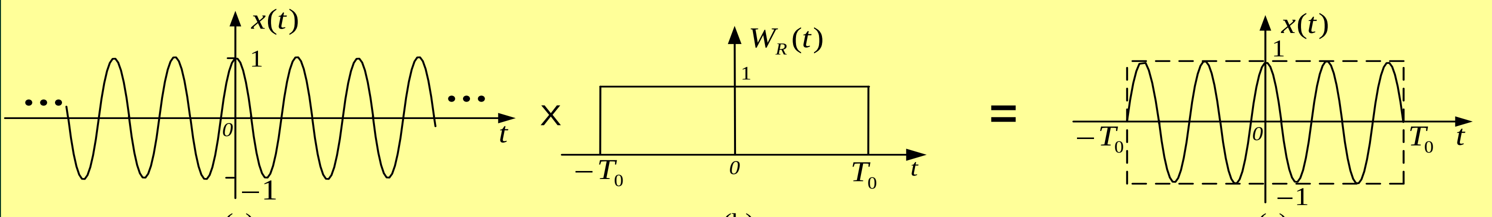
(b)周期单位脉冲序列的频谱

例2-8:求被截取的余弦信号的频谱函数

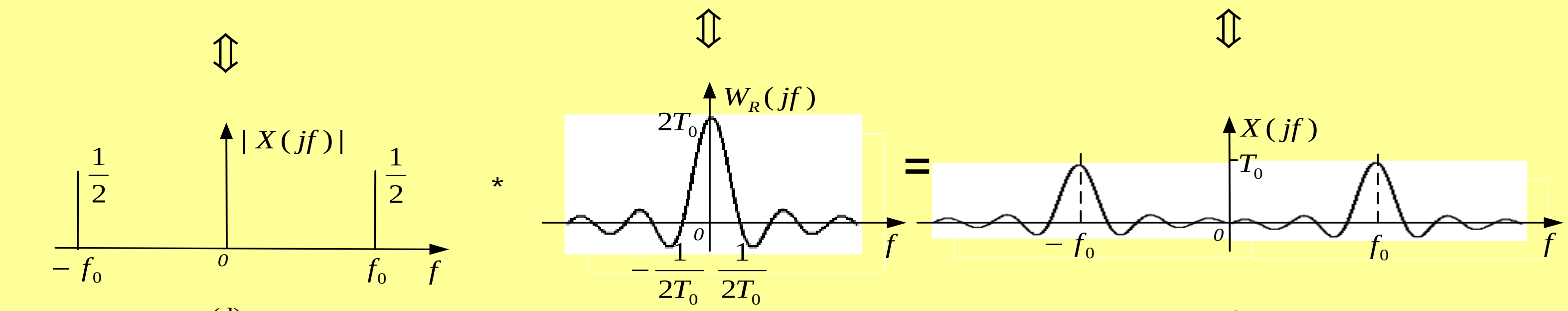
在线开放课程

时域表达式

$$x(t)=\begin{cases}\cos\omega_0 t & |t|<T_0\\ 0 & |t|>T_0\end{cases}$$



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

7. 频谱分析的应用

频谱分析主要用于识别信号中的周期分量，是信号分析中最常用的一种手段。

案例：在齿轮箱故障诊断

通过齿轮箱振动信号频谱分析，确定各频率分量，然后根据机床转速和传动链，找出故障齿轮。

案例：螺旋桨设计

可以通过频谱分析确定螺旋桨的固有频率和临界转速，确定螺旋桨转速工作范围。

小结

- 瞬态信号与连续频谱