石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

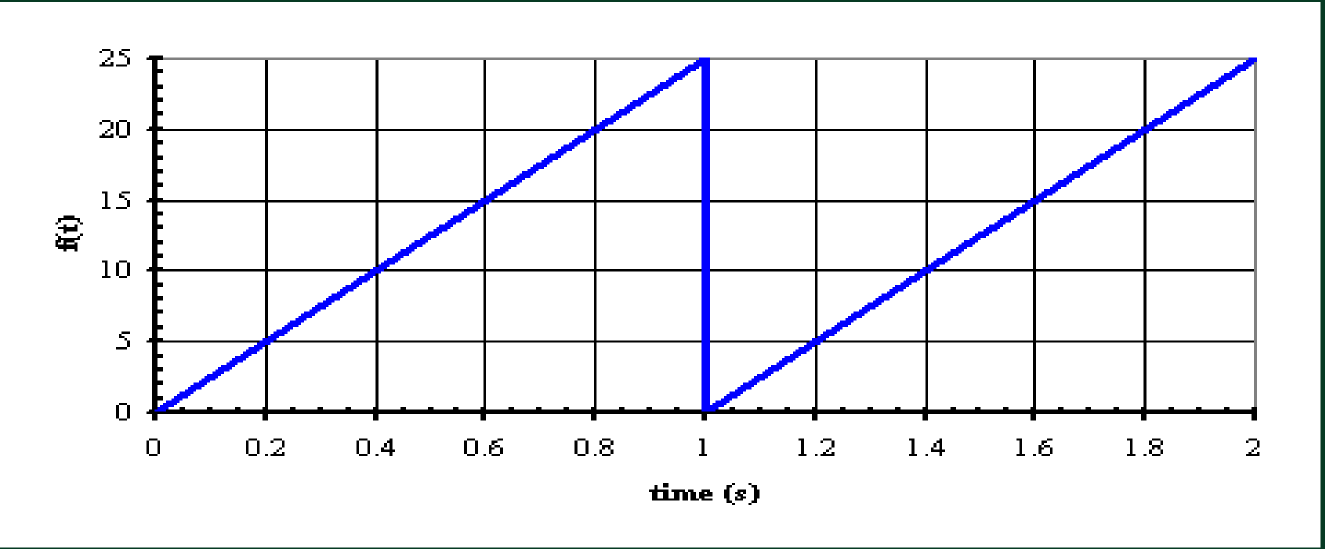
在线开放课程

信号的描述及其频谱分析

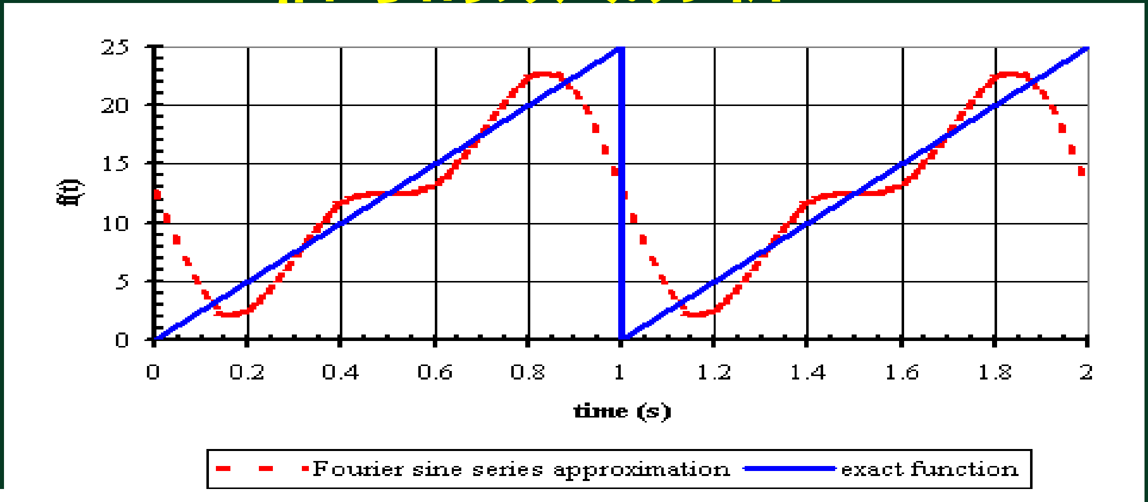
周期信号与离散频谱（二）

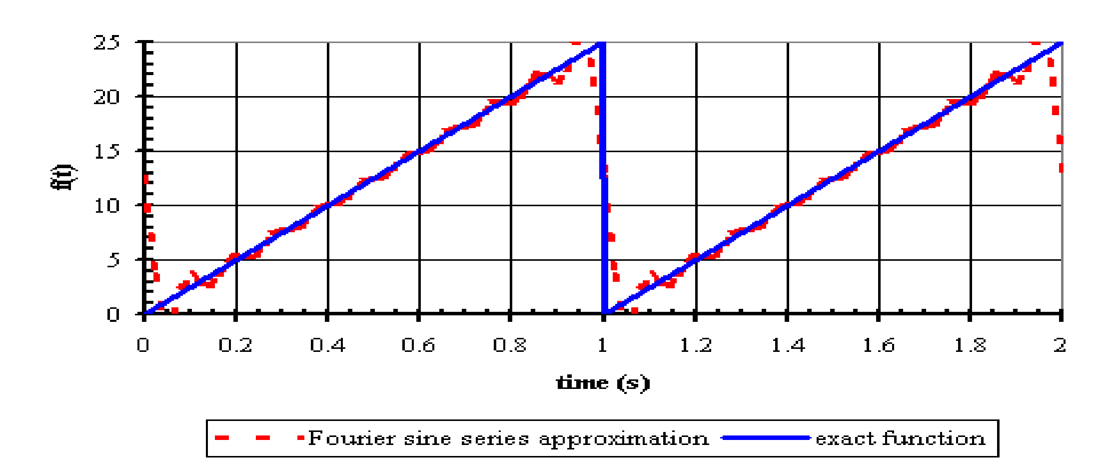
主讲 ： 牛江川

2.3 信号的频域分析



2.3 信号的频域分析





由以上计算结果可看到，信号本身可以用傅里叶级数中的某几项之和来逼近．所取的项数越多，亦即n越大，近似的精度越高。

2.3周期信号的频谱分析——傅立叶级数复指数展开

- 欧拉公式

$$e^{\pm jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t \pm j\sin n\omega_0 t \quad (j=\sqrt{-1})$$

则

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t})$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{j}{2}(e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t})$$

那么

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}(e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) + j\frac{b_n}{2}(e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t})\right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

令

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=0} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

即
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

由
$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$
$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$
$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

所以
$$C_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos n\omega_0 t\,dt-\frac{2j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right]$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\left[\cos n\omega_0 t-j\sin n\omega_0 t\right]dt$$

即
$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

在一般情况下，C_n是复数

$$C_n = C_{nR} + jC_{nI} = |C_n| e^{j\varphi_n}$$

$$|C_n| = \sqrt{C_{nR}^2 + C_{nI}^2}$$

$$\varphi_n = arctg \frac{C_{nI}}{C_{nR}}$$

把周期函数$x(t)$展开为傅立叶级数以后，作关系图

C_{nR}—ω_0称为实频图

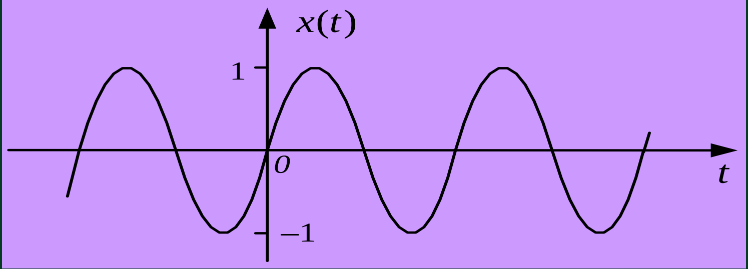
C_{nI}—ω_0称为虚频图

$|C_n|$—ω_0称为双边幅频图，n=-∞~+∞，$n\omega$=-∞~+∞，

φ_n—ω_0称为双边相频图

例3.画出正弦函数$\sin\omega_0 t$的频谱图。

$$\sin\omega_0 t=\frac{j}{2}(e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t})$$

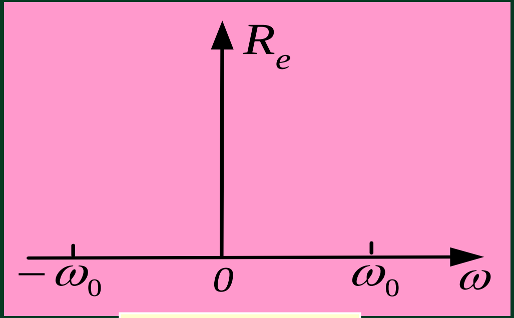


$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

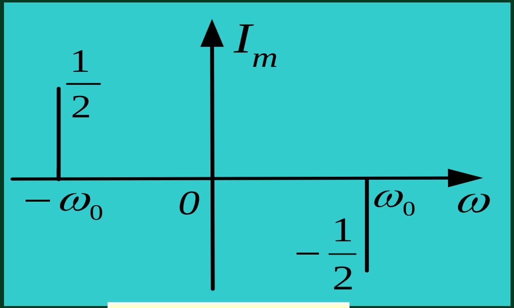
$$\sin\omega_0 t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}=j\frac{1}{2}e^{j\cdot(-1)\cdot\omega_0\cdot t}+j\frac{-1}{2}e^{j\cdot1\cdot\omega_0\cdot t}$$

在 $-\omega_0$ 处： $C_n=\frac{j}{2}$ $C_{nR}=0$ $C_{nI}=\frac{1}{2}$ $|C_n|=\frac{1}{2}$ $\varphi_n=\frac{\pi}{2}$

在 ω_0 处： $C_n=-\frac{j}{2}$ $C_{nR}=0$ $C_{nI}=-\frac{1}{2}$ $|C_n|=\frac{1}{2}$ $\varphi_n=-\frac{\pi}{2}$



实频图



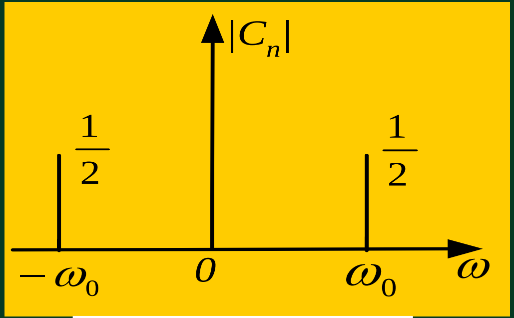
虚频图

在 $-\omega_0$ 处：$C_{nR}=0$；$C_{nI}=\frac{1}{2}$；

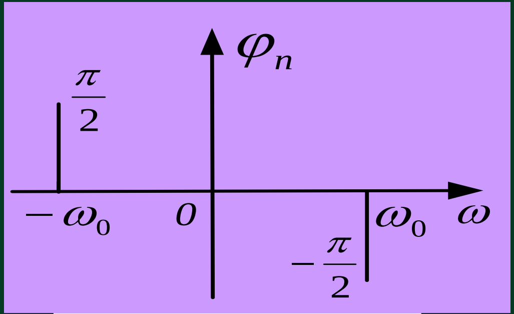
$|C_n|=\frac{1}{2}$；$\varphi_n=\frac{\pi}{2}$

在 ω_0 处：$C_{nR}=0$；$C_{nI}=-\frac{1}{2}$；

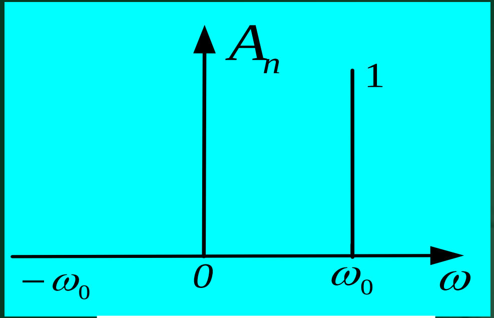
$|C_n|=\frac{1}{2}$；$\varphi_n=-\frac{\pi}{2}$



双边幅频图



双边相频图



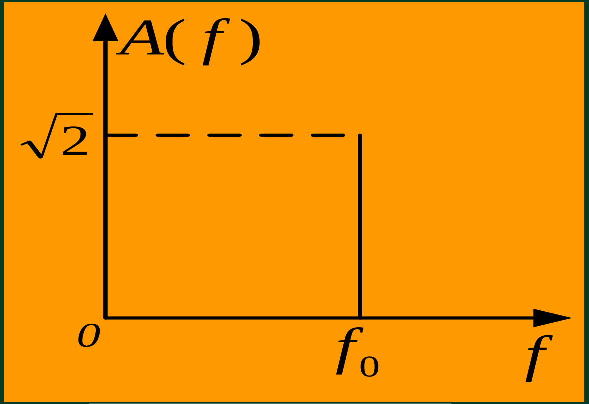
单边幅频图

一般周期函数实频谱总是偶对称的，虚频谱总是奇对称的。

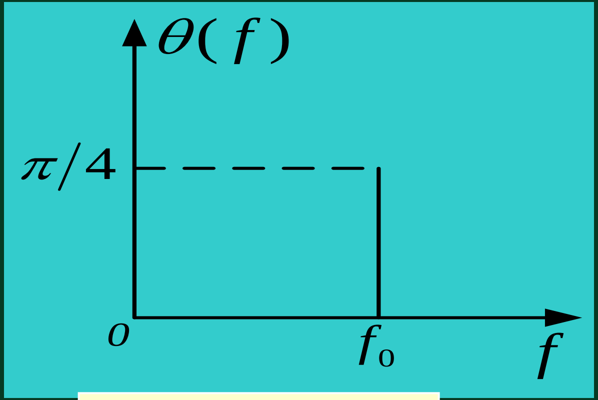
例4.画出 $x(t)=\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t+\pi/4)$ 的频谱

1.三角频谱

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_0 t+\theta_n),(n=1,2,\ldots)$$



幅值频谱图



相位频谱图

2.复指数频谱

$$x(t)=\sin 2\pi f_0 t+\cos 2\pi f_0 t = j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi f_0 t}-e^{j2\pi f_0 t})+\frac{1}{2}(e^{-j2\pi f_0 t}+e^{j2\pi f_0 t})$$

$$= j\frac{1}{2}(e^{j2\pi(-f_0)t}-e^{j2\pi f_0 t})+\frac{1}{2}(e^{j2\pi(-f_0)t}+e^{j2\pi f_0 t})$$

$$=(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})e^{j2\pi(-f_0)t}+(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})e^{j2\pi f_0 t}$$

在 $-f_0$ 处：

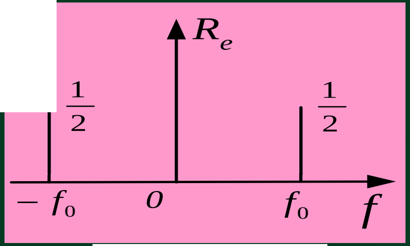
$C_{nR}=1/2$ $C_{nI}=1/2$

$|C_n|=\sqrt{2}/2$ $\varphi_n=\pi/4$

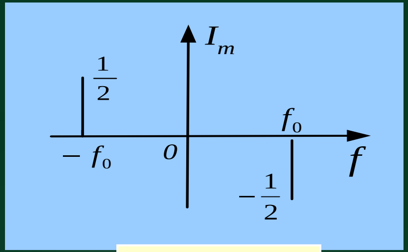
在 f_0 处：

$C_{nR}=1/2$ $C_{nI}=-\frac{1}{2}$

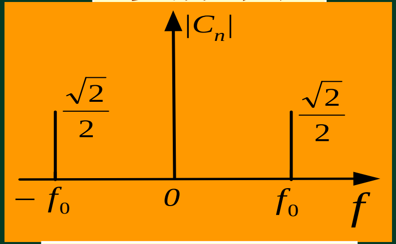
$|C_n|=\sqrt{2}/2$ $\varphi_n=-\pi/4$



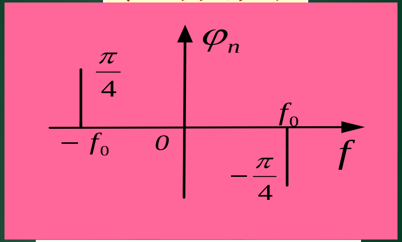
实频图



虚频图

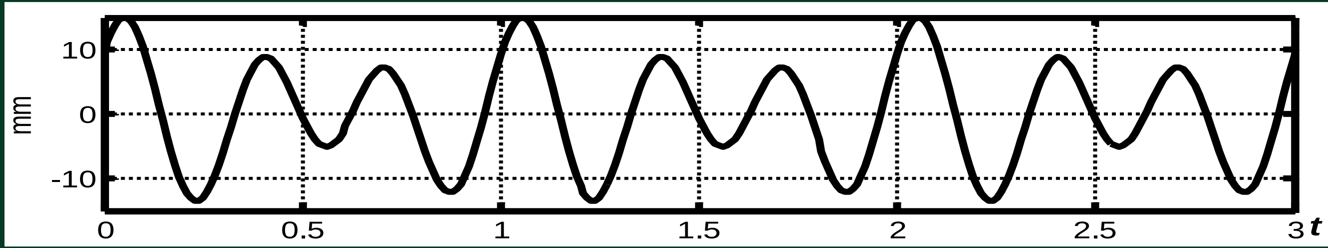


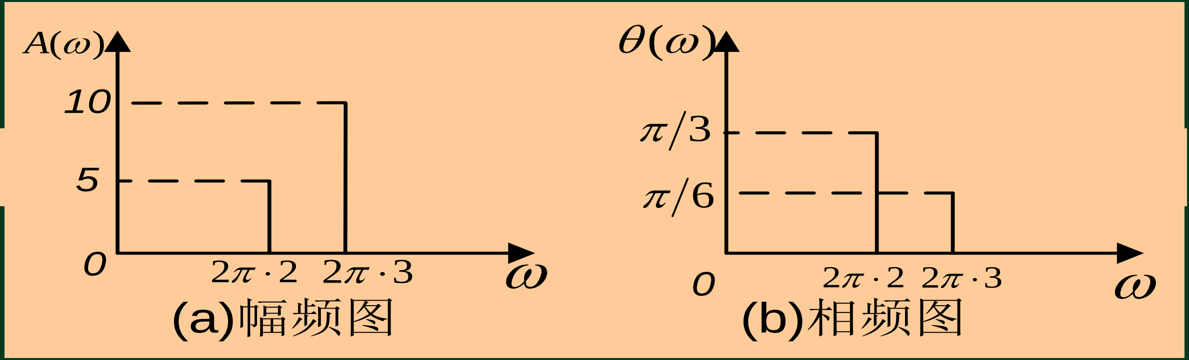
双边幅频图



双边相频图

例5.画出$x_3(t)=10Sin(2\pi\cdot 3\cdot t+\pi/6)+5Sin(2\pi\cdot 2\cdot t+\pi/3)$的频谱





$$x_3(t)=10Sin(2\pi\cdot 3\cdot t+\pi/6)+5Sin(2\pi\cdot 2\cdot t+\pi/3)$$

$$x_3(t)=10[\sin(2\pi 3t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos(2\pi 3t)\cdot\frac{1}{2}]$$

$$+5[\sin(2\pi 2t)\cdot\frac{1}{2}+\cos(2\pi 2t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$=5\sqrt{3}\sin(2\pi 3t)+5\cos(2\pi 3t)+\frac{5}{2}\sin(2\pi 2t)+\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi 2t)$$

$$x_3(t)=j\frac{5\sqrt{3}}{2}[e^{-j2\pi 3t}-e^{j2\pi 3t}]+\frac{5}{2}[e^{-j2\pi 3t}+e^{j2\pi 3t}]$$

$$+j\frac{5}{4}[e^{-j2\pi 2t}-e^{j2\pi 2t}]+\frac{5\sqrt{3}}{4}[e^{-j2\pi 2t}+e^{j2\pi 2t}]$$

$$x_3(t) = j\frac{5\sqrt{3}}{2}[e^{-j2\pi 3t} - e^{j2\pi 3t}] + \frac{5}{2}[e^{-j2\pi 3t} + e^{j2\pi 3t}]$$

$$+ j\frac{5}{4}[e^{-j2\pi 2t} - e^{j2\pi 2t}] + \frac{5\sqrt{3}}{4}[e^{-j2\pi 2t} + e^{j2\pi 2t}]$$

$$= (\frac{5}{2} + j\frac{5\sqrt{3}}{2})e^{-j2\pi 3t} + (\frac{5}{2} - j\frac{5\sqrt{3}}{2})e^{j2\pi 3t}$$

$$+ (\frac{5\sqrt{3}}{4} + j\frac{5}{4})e^{-j2\pi 2t} + (\frac{5\sqrt{3}}{4} - j\frac{5}{4})e^{j2\pi 2t}$$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

在 $\omega = -2\pi 3$ 处：$C_n = \frac{5}{2} + j\frac{5\sqrt{3}}{2}$　$C_{nR} = \frac{5}{2}$　$C_{nI} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$　$|C_n| = 5$　$\varphi_n = \frac{\pi}{3}$

在 $\omega = 2\pi 3$ 处：$C_n = \frac{5}{2} - j\frac{5\sqrt{3}}{2}$　$C_{nR} = \frac{5}{2}$　$C_{nI} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$　$|C_n| = 5$　$\varphi_n = -\frac{\pi}{3}$

在 $\omega = -2\pi 2$ 处：$C_n = \frac{5\sqrt{3}}{4} + j\frac{5}{4}$　$C_{nR} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$　$C_{nI} = \frac{5}{4}$　$|C_n| = \frac{5}{2}$　$\varphi_n = \frac{\pi}{6}$

在 $\omega = 2\pi 2$ 处：$C_n = \frac{5\sqrt{3}}{4} - j\frac{5}{4}$　$C_{nR} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$　$C_{nI} = -\frac{5}{4}$　$|C_n| = \frac{5}{2}$　$\varphi_n = -\frac{\pi}{6}$

$\omega=-2\pi 3$

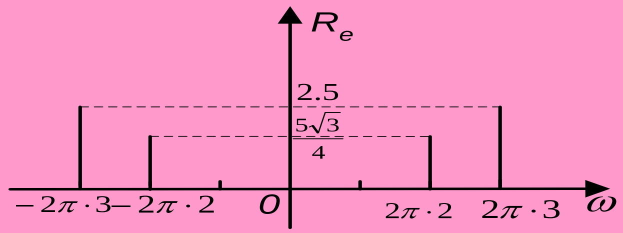
$C_{nR}=\frac{5}{2}$ $C_{nI}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $|C_n|=5$ $\varphi_n=\frac{\pi}{3}$

$\omega=2\pi 3$

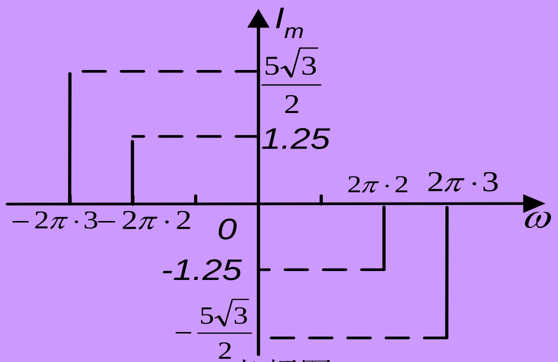
$C_{nR}=\frac{5}{2}$ $C_{nI}=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $|C_n|=5$ $\varphi_n=-\frac{\pi}{3}$

$\omega=-2\pi 2$ $C_{nR}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ $C_{nI}=\frac{5}{4}$ $|C_n|=\frac{5}{2}$ $\varphi_n=\frac{\pi}{6}$

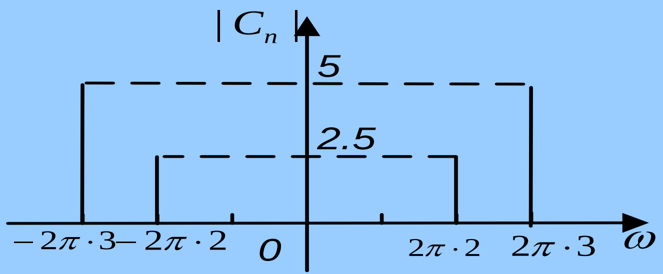
$\omega=2\pi 2$ $C_{nR}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ $C_{nI}=-\frac{5}{4}$ $|C_n|=\frac{5}{2}$ $\varphi_n=-\frac{\pi}{6}$



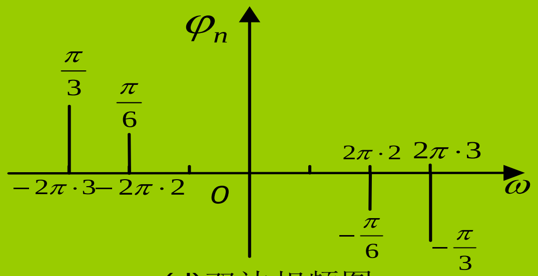
(a)实频图



(b)虚频图



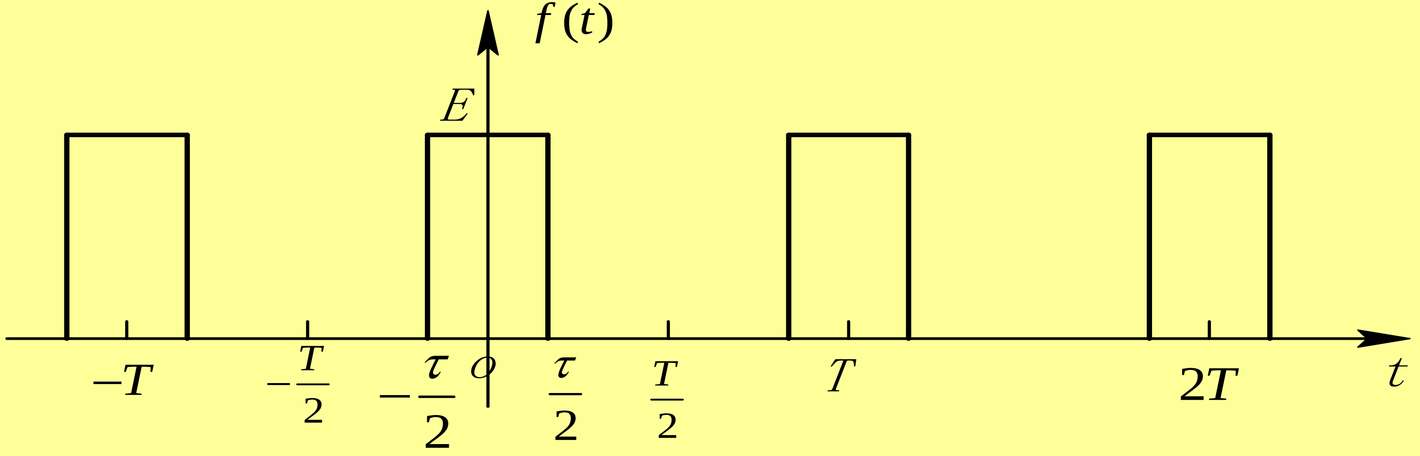
(c)双边幅频图



(d)双边相频图

例6.作出周期性矩形脉冲信号的频谱。

$$f(t)=\begin{cases} E & \text{当}\ |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当}\ -\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{\tau}{2},\ \dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{T}{2} \end{cases}$$



周期矩形脉冲信号

为得到该信号的频谱，先求其傅里叶级数的复振幅。

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-jn\omega_0 t}dt$$

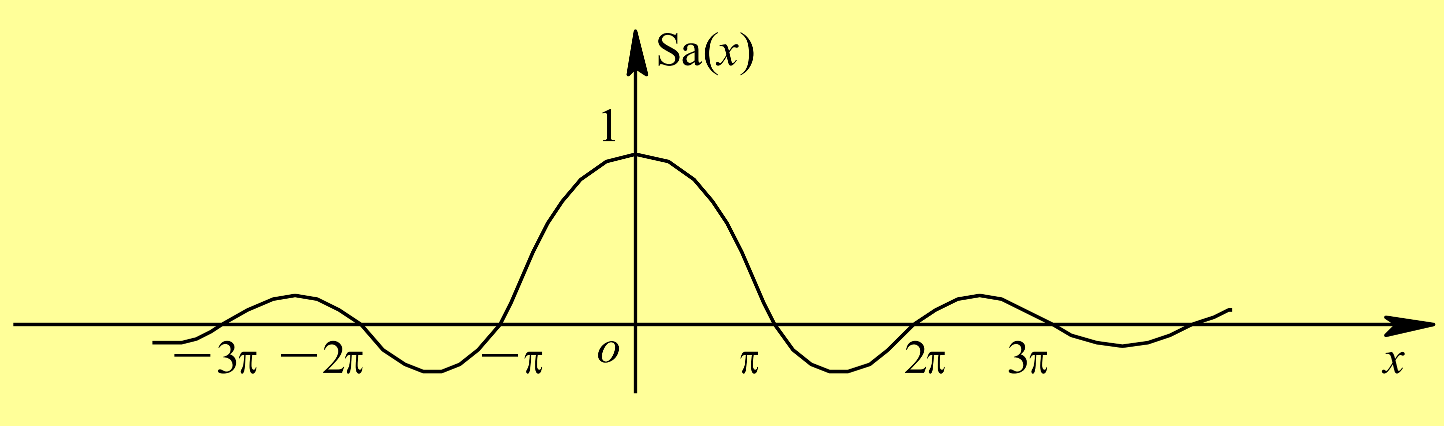
$$= \frac{E}{T}\cdot\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2E}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0}$$

$$= \frac{E\tau}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

取样函数定义为

$$Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$$

这是一个偶函数，且$x\to 0$时，$Sa(x)=1$；当$x=k\pi$时，$Sa(k\pi)=0$。

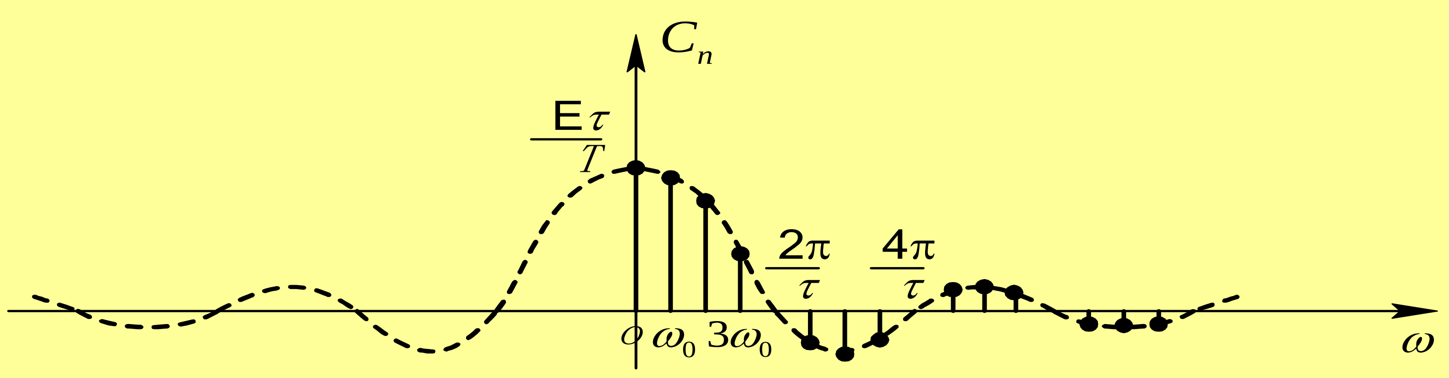


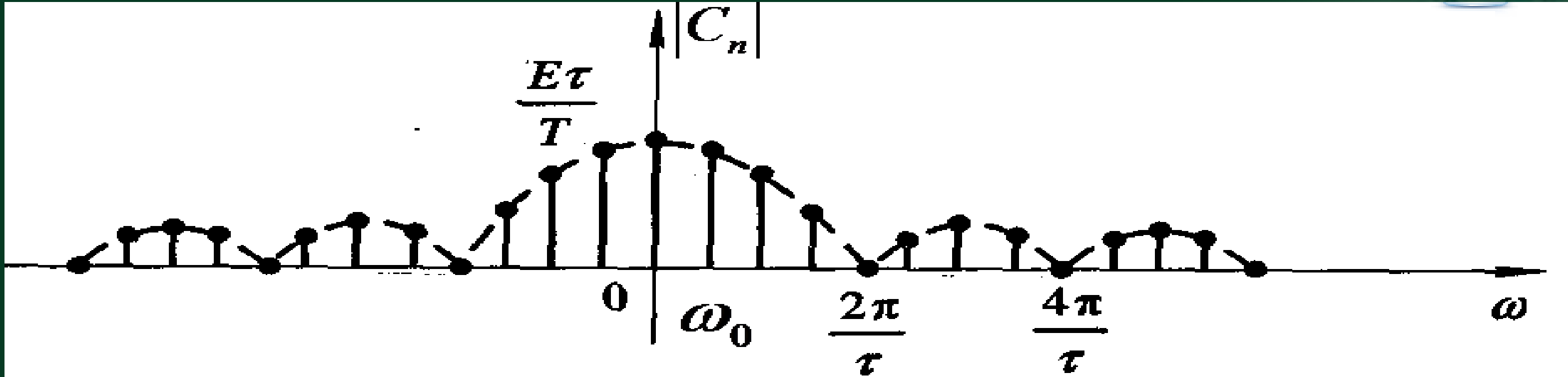
Sa(x)函数的波形

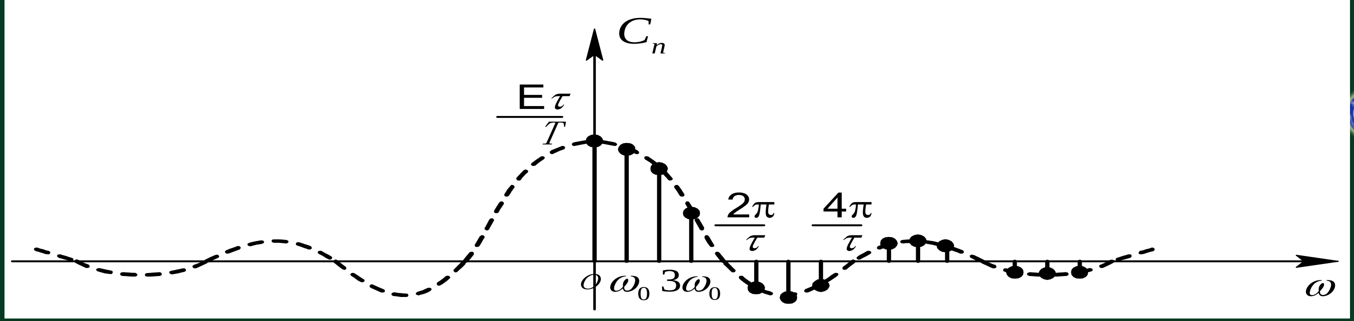
据此，可将周期矩形脉冲信号的复振幅写成取样函数的形式，即

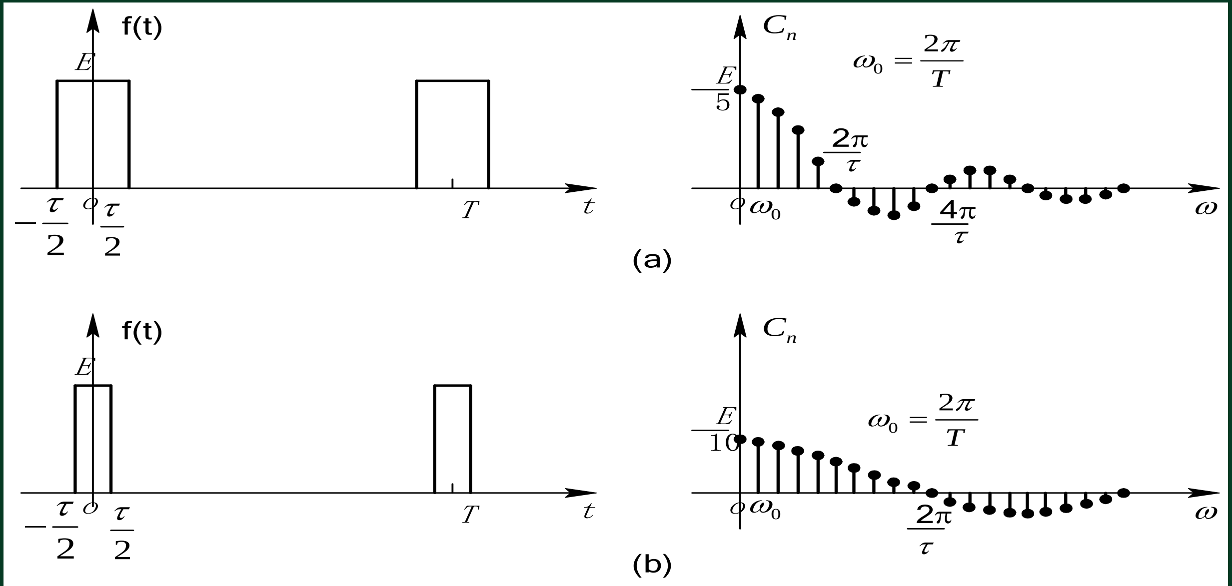
$$C_n = \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

在线开放课程

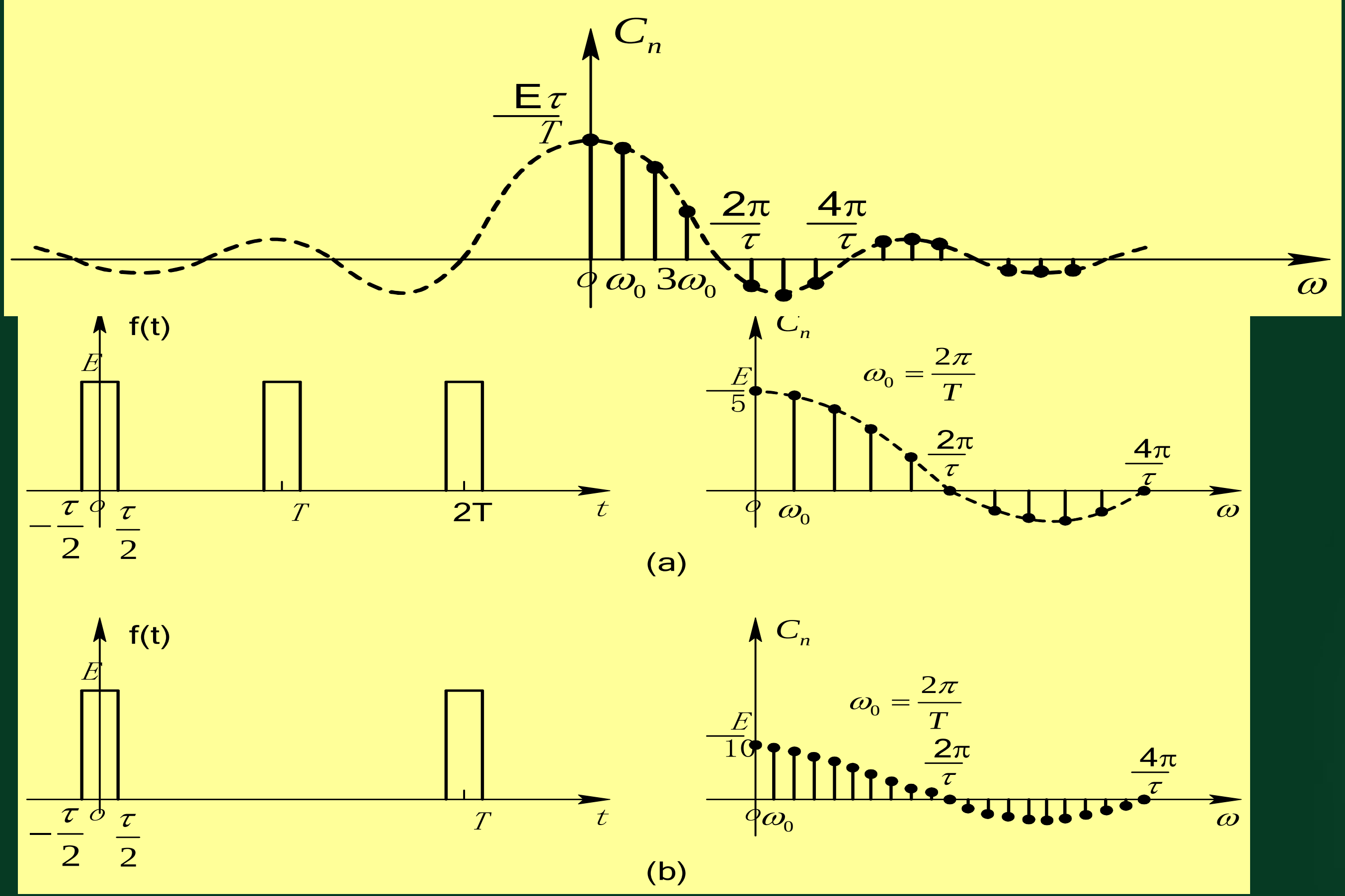








不同τ值时周期矩形信号的频谱(*a*) $\tau=T/5$; (*b*) $\tau=T/10$



在线开放课程

不同*T*值时周期矩形信号的频谱**(*a*) *T*=5*τ*; (*b*) *T*=10 *τ***

六、周期信号频谱的特点

结论：周期信号的频谱具有离散性、谐波性和收敛性

1) 周期信号频谱是离散的；

2)每条谱线只出现在基波频率的整倍数上，不存在非整倍数的频率分量；

3)各频率分量的谱线高度与对应谐波的振幅成正比。工程中常见的周期信号，其谐波幅值总的趋势是随谐波次数的增高而减小的。

4）低频谐波幅值较大，是构成信号的主体，而高频谐波只起**美化细节**的作用。

5）随着阶数n的增加，谐波系数A_n逐渐减小，当n很大时，A_n所起的作用很小。

小结

- 傅立叶级数复指数展开