石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的稳定性

# 系统稳定性判据之Routh判据

主讲 ： 刘希太

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据



系统特征方程：$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$ 编制劳斯表：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | .. |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | .. |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | .. |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | .. |
| .. | .. | .. | .. | .. |
| .. | .. | .. | .. | .. |
| $s^2$ | $e_1$ | $e_2$ | | |
| $s^1$ | $f_1$ | | | |
| $s^0$ | $g_1$ | | | |

从第三行开始：

$$b_1=-\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2=-\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_1=-\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2=-\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

**1、Routh判据：**特征实部为正数的根的个数,等于劳斯表第一列元素符号改变的次数。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据



2、Routh判据判断稳定条件：

- 特征多项式各系数皆为正数(此为必要条件)；
- Routh表中第一列各元素均为正数。

3、Routh判据应用：

- 判断系统稳定性
- 分析系统参数变化对稳定性影响;确定使系统稳定的参数取值范围

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

## 4、Routh判据应用示例

例1：已知系统的特征方程：$D(s)=s^4+6s^3+12s^2+11s+6=0$

试用劳思稳定判据判别系统稳定性。

解：劳思表：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 12 & 6 \\
\hline
s^3 & 6 & 11 & 0 \\
s^2 & 61/6 & 6 & \\
s^1 & 455/61 & & \\
s^0 & 6 & &
\end{array}
$$

第一列数符号全为正，系统稳定。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据



例2：系统的特征方程：$D(s)=s^4+s^3-s^2+s+1=0$

试用劳思稳定判据判别系统稳定性。

解：特征方程系数中有负值，不满足稳定的必要条件。

劳思表：

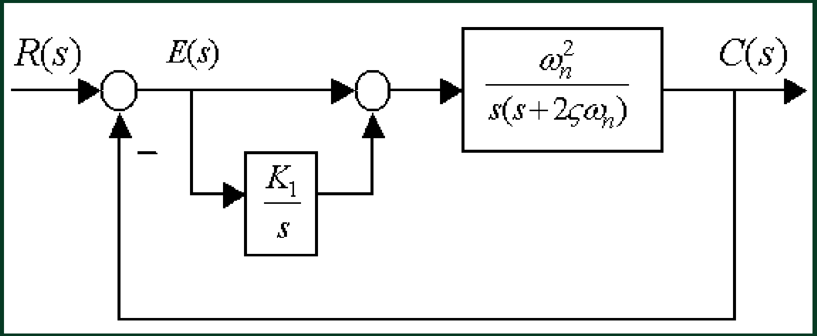
$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
s^3 & 1 & 1 & 0 \\
s^2 & -2 & 1 & \\
s^1 & 3/2 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

劳思表第一列数符号变化2次，系统有2个特征根在右半S平面。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据

在线开放课程

**例3：已知系统结构图，** 试用劳思稳定判据判别系统稳定性。




**解：系统的开环传递函数：**

$$G(s)=(1+\frac{K_1}{s})\frac{\omega_n{}^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$\Rightarrow D(s)=s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2=0$$

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据



$$D(s)=s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2=0$$

劳思表：

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $\omega^2{}_n$ |
| $s^2$ | $2\xi\omega_n$ | $K_1\omega^2{}_n$ |
| $s^1$ | $\dfrac{2\xi\omega_n{}^2-K_1\omega_n}{2\xi}$ | |
| $s^0$ | $K_1\omega^2{}_n$ | |

系统稳定充要条件：$\begin{cases} 2\xi\omega_n{}^2-K_1\omega_n>0 \\ K_1\omega_n^2>0 \end{cases}$

$K_1$取值范围：$0<K_1<2\xi\omega_n$　　$K_1=2\xi\omega_n$时，系统临界稳定。

## 4、Routh判据的特殊情况

◆ Routh表第一列出现0，而0所在行其它元素不全为0时，可将0用一个无穷小的正数ε代替继续计算；或用因子(s+a)乘以原特征式，a为任意正数，再对新的特征方程运用Routh判据。

**状况发生原因：**系统有一对纯虚根，处于临界稳定状态（其它结论同前）。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

## 4、Routh判据的特殊情况

◆ Routh表中某行元素全为0，可利用该行的上一行元素构造一个辅助特征方程，以其导函数系数代替全0行继续计算。

状况发生原因：方程存在关于原点对称的根(或存在一对符号相反的实根；或存在一对共轭纯虚根；或上述两种情况同时存在；或存在与原点对称的两对共轭根)。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

例4：设系统的特征方程：$s^3-3s+4=0$ ，试用劳斯判据确定正实部根的个数。

解：劳思表：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & -3 \\
\hline
s^2 & 0 & 4 \\
s^1 & \infty & \\
s^0 & &
\end{array}
$$

以因子(s+a)乘以原特征式，可取a=1。

$$(s^3-3s+4)(s+1)=s^4+s^3-3s^2+s+4=0$$

新劳思表：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & -3 & 4 \\
\hline
s^3 & 1 & 1 & \\
s^2 & -4 & 4 & \\
s^1 & 2 & & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}
$$

结论：第一列符号变化两次，方程有两个正实部根。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据



例5：系统特征方程：$D(s)=s^4+3s^3+s^2+3s+1=0$

用劳思稳定判据判别系统稳定性。

解：劳思表：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
s^3 & 3 & 3 & 0 \\
s^2 & \varepsilon & 1 & \\
s^1 & 3-\dfrac{3}{\varepsilon} & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

$3-\dfrac{3}{\varepsilon}<0$ ，系统不稳定，方程有两个正实部根。

# 5.2 系统稳定性判据之Routh判据

例6：系统特征方程：$s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0$

试用劳思判据确定正实部根的个数。

**解：劳思表：**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^6$ | 1 | $-2$ | $-7$ | $-4$ |
| $s^5$ | 1 | $-3$ | 4 | |
| $s^4$ | 1 | $-3$ | 4 | |
| $s^3$ | 4 | $-6$ | 0 | |
| $s^2$ | $-1.5$ | $-4$ | | |
| $s^1$ | $-16.7$ | 0 | | |
| $s^0$ | $-4$ | | | |

用全零行的上一行系数构造辅助方程：

$$F(s)=s^4-3s^2-4$$

求导得：$\dfrac{dF(s)}{ds}=4s^3-6s=0$

用上面方程系数代替全零行继续计算。

**结论：特征方程有一个正实部根。**

**解辅助方程**知产生全零行的根为$\pm 2, \pm j$，另2个根为$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}j}{2}$。

**Routh判据缺点:**

- 必须知道系统传递函数;
- 只能定性判断稳定性;
- 对有延迟的系统无效;
- 无法提供改善系统性能的措施。

利用系统开环频率特性图，可得到应用更普遍的**Nyquist判据和Bode判据**。通过这两种定义在频率域的**几何判据**，不但可以直观地判断系统的稳定性,而且可判断系统的稳定性程度,方便地找到改善系统特性的方法。