



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的频率特性分析

频率特性的图示方法(2)

主讲：牛江川

2、频率特性的对数坐标图

伯德(H.W.Bode),1905—1982,美国Bell实验室著名科学家。

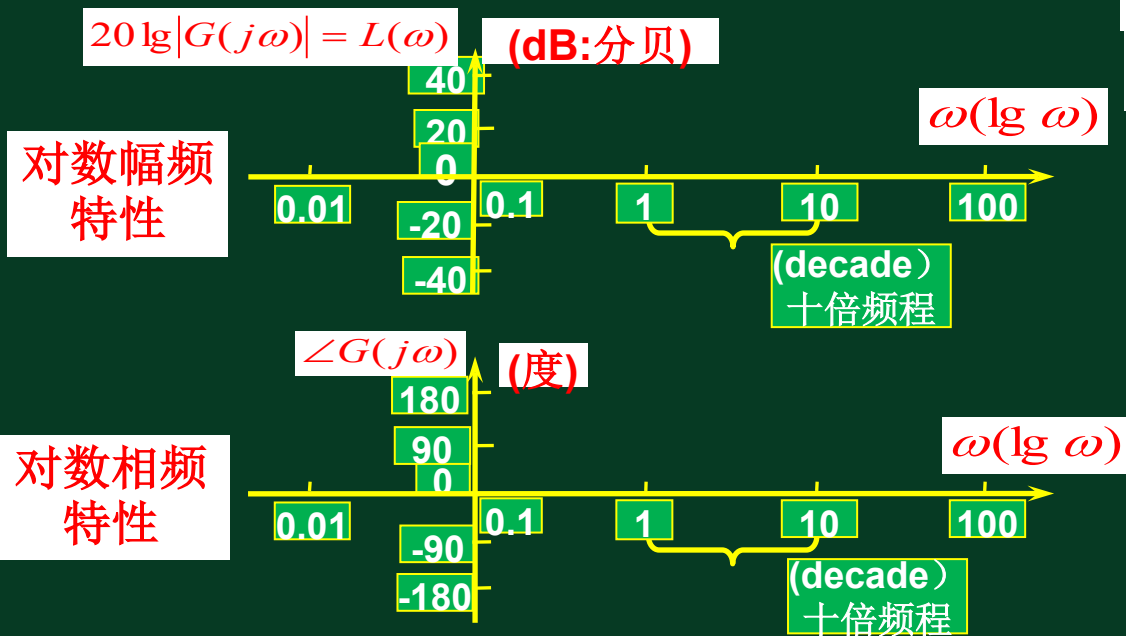
(1)Bode图概念

频率特性的对数坐标图又称**Bode**图，它由**对数幅频特性图**和**对数相频特性图**两部分组成，分别表示幅频特性和相频特性，是频率法中用的**最广泛**的一组图线，在半对数坐标上进行绘制（其中幅频特性用对数取值，相频特性则取原值）。

特点：①对数坐标图的横坐标为角频率 ω ，单位为弧度/秒或秒⁻¹。它采用对数刻度，刻度是不均匀。其数值每增大10倍，横坐标变化一格，称为10倍频程，通常用“dec”表示。为表示方便，其刻度值不用 $\lg\omega$ 表示，而标 ω 值。

横坐标轴上两点
间距离是：

$$\omega_1, \omega_2 \quad \lg \omega_2 - \lg \omega_1$$



②对数幅频特性图的纵坐标表示频率特性的幅值，单位是分贝

（任意一个数取对数后乘以20即为其分贝值），记为dB，

按线性分度，故其刻度是均匀的， $ndB = 20|G(j\omega)|$

简写为 $20|G|$ 当 $|G(j\omega)| = 1$ 其分贝值为零，即0dB，

表示输出幅值等于输入幅值。纵坐标变化一格，表示幅频

特性增大或减小20dB。对数相频特性的纵坐标表示频率

特性的相位，单位是度，其刻度也是均匀的。

(2)用bode图表示频率特性优点

- ①将串联环节幅值的乘、除化为加、减，简化了计算和作图；
- ②可用近似方法作图，先分段作出幅频特性渐近线，再修正；
- ③可分别作出各个环节的bode图，通过叠加得到整个系统的bode图，并可由此看出各环节对系统总特性的影响；
- ④采用对数坐标能表示出较宽范围内的频率特性，且突出了系统的低频特性，横坐标起点可根据实际情况确定。

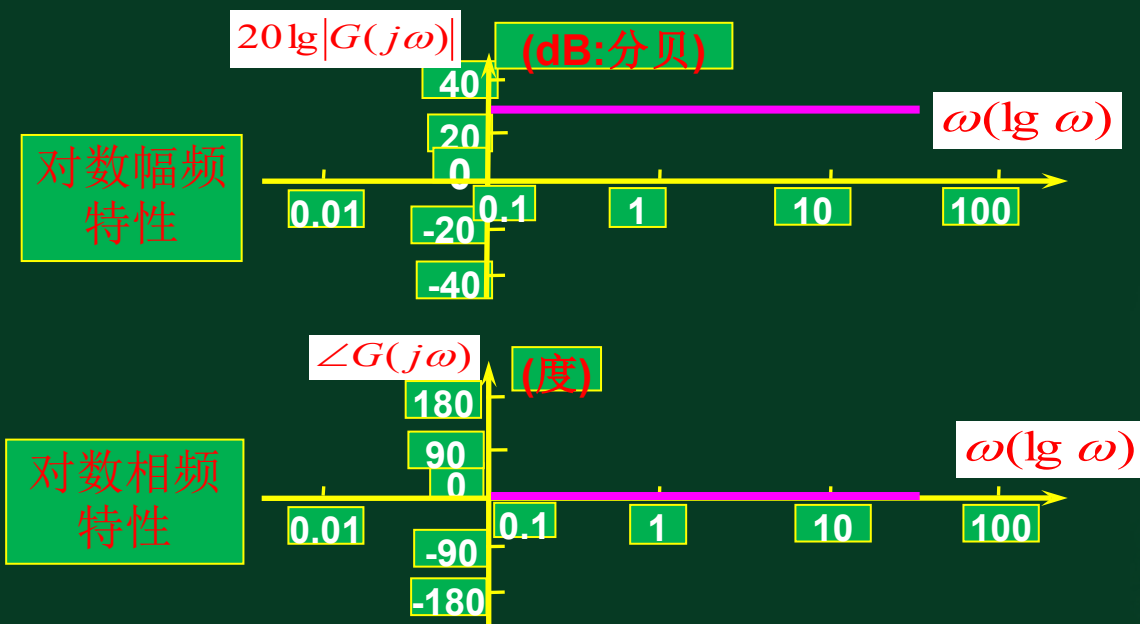
(3)典型环节的bode图

①比例环节

$$G(s) = k, \quad G(j\omega) = k,$$

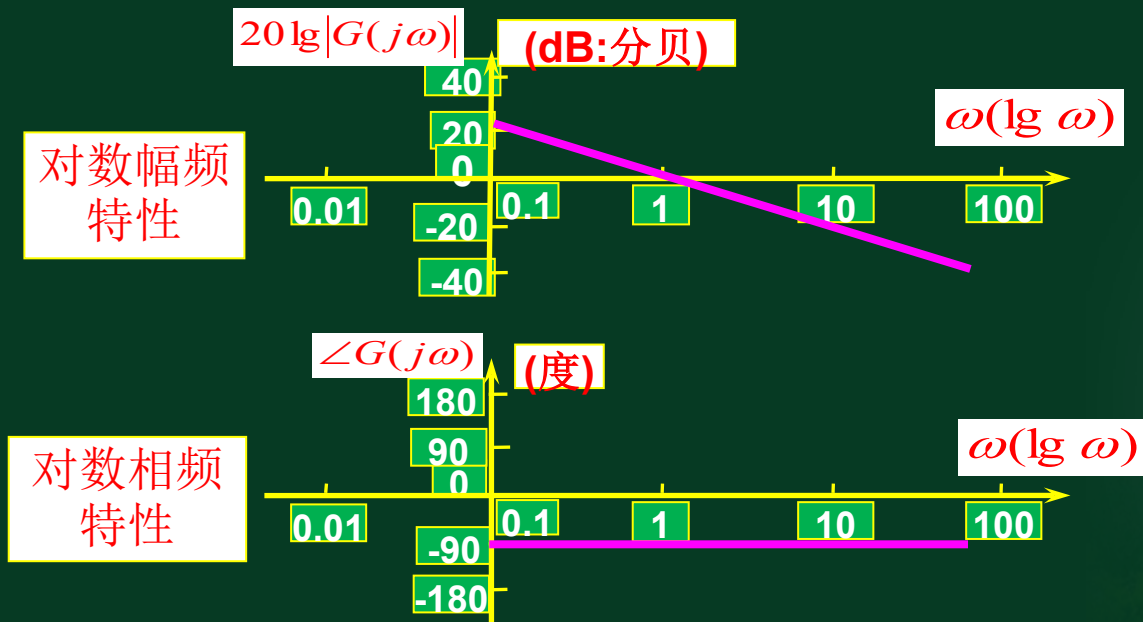
$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

在线开放课程



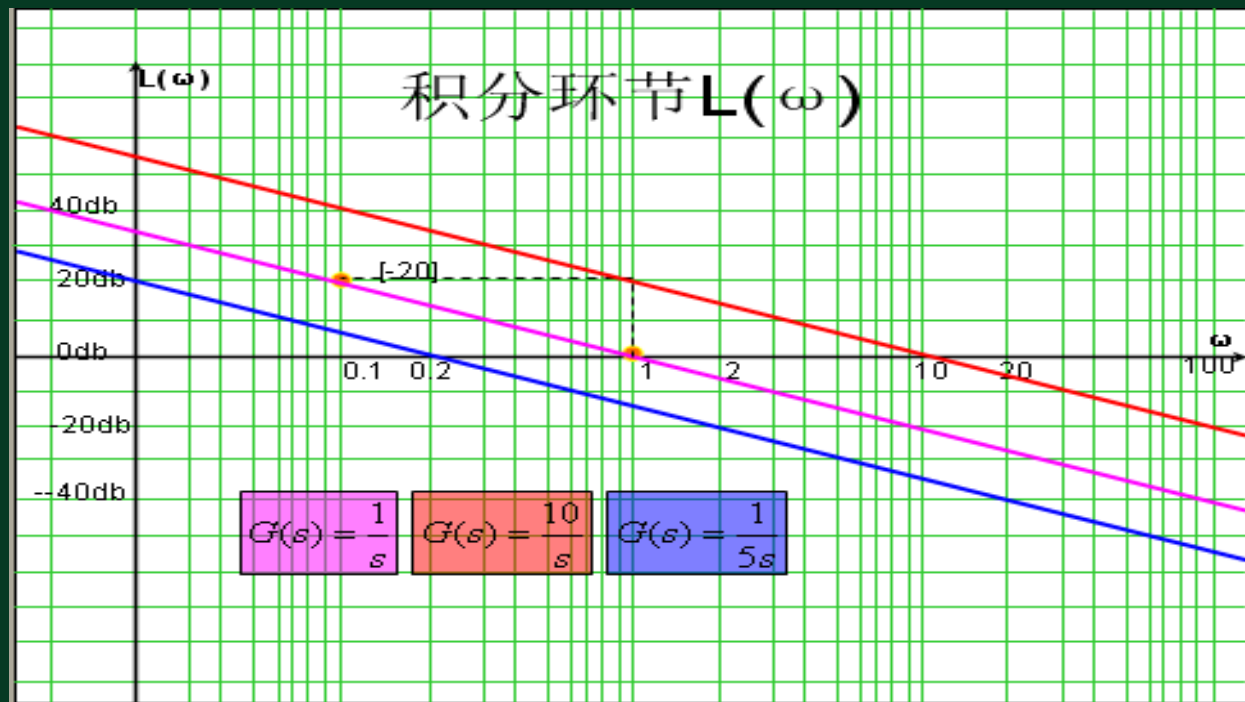
②积分环节

传函: $G(s) = \frac{1}{s}$, 频率特性: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$, $\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$ 在线开放课程



每增大频率10倍频程幅频特性减小20dB。注意与轴交点情况。

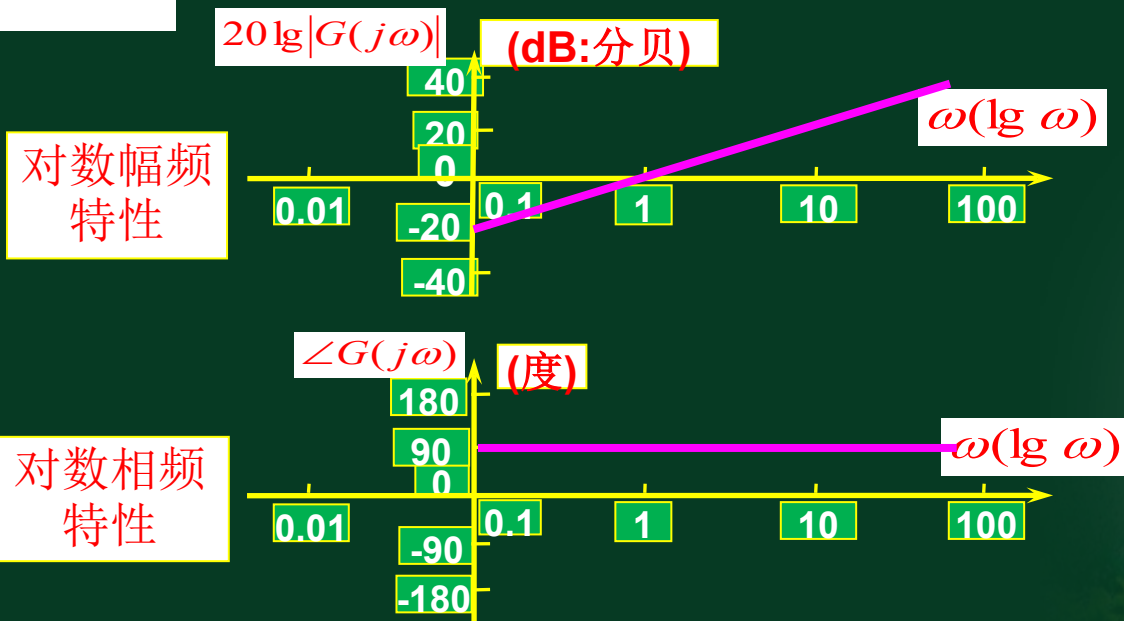
在线开放课程



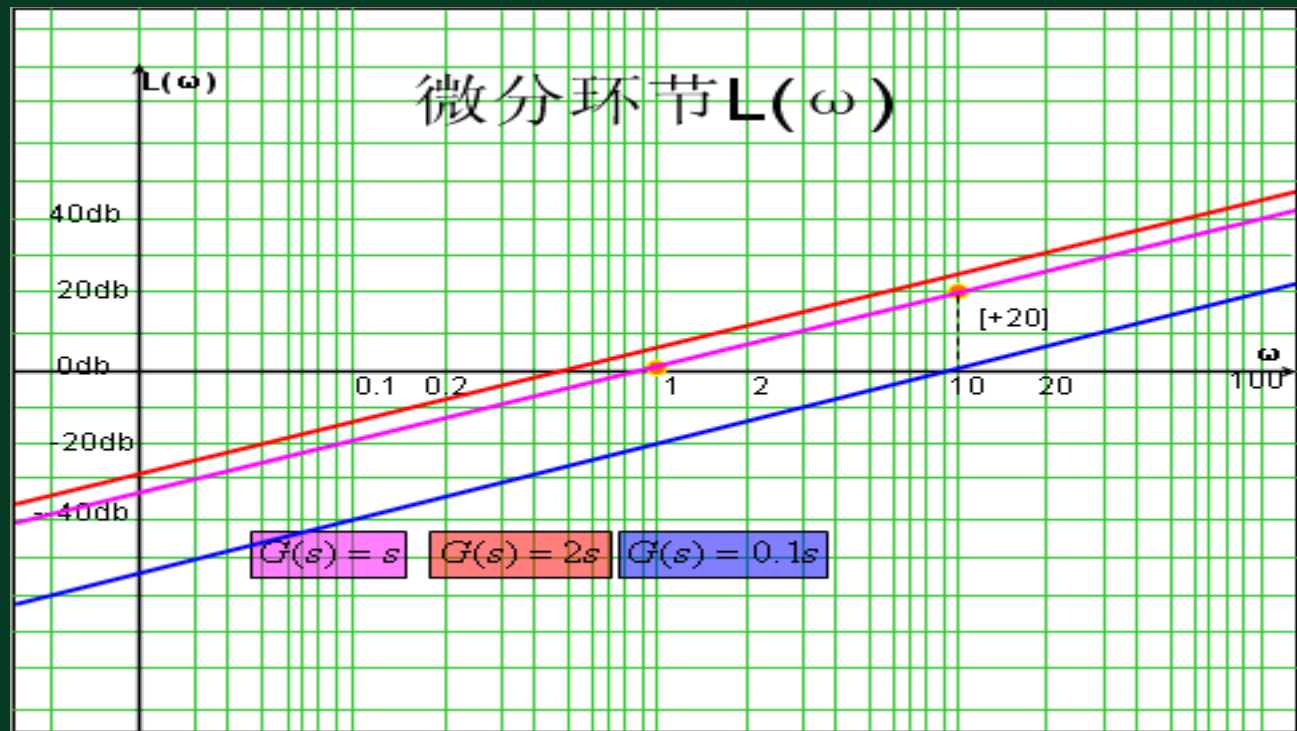
③微分环节

传函: $G(s) = s$, 频率特性: $G(j\omega) = j\omega$,

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



每增大频率10倍频程幅频特性增大20dB。注意与轴交点情况。



④惯性环节（一阶积分）

传函： $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ ，频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

当 $K=1$ 时，令： $\omega_T = \frac{1}{T}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_T}} = \frac{\omega_T}{\omega_T + j\omega}$$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$

讨论 I: 对幅频特性, 称 $\omega_T = \frac{1}{T}$ 为转角频率, 以其为分界, 将频率分为高频段和低频段。在低频段即当

$\omega \ll \omega_T$ 时, $20 \lg |G(j\omega)| \approx 0 \text{dB}$, 且 $\omega = \omega_T$ 时有

$20 \lg |G(j\omega)| = 0 \text{dB}$, 说明低频渐近线是止于点 $(\omega_T, 0)$

的 0dB 直线。在 $\omega = \omega_T$ 附近的误差为:

$$e(\omega) = 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2}$$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$

在高频段即当 $\omega \gg \omega_T$ 时有:

$$20 \lg |G(j\omega)| \approx 20 \lg \omega_T - 20 \lg \omega$$

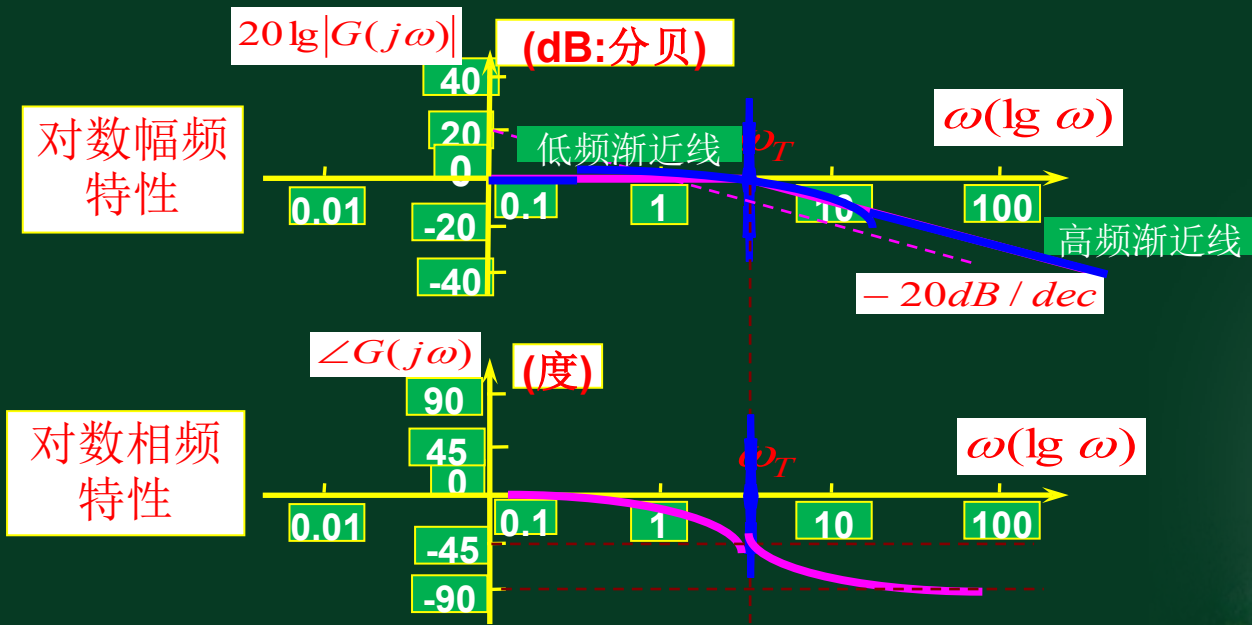
$\omega = \omega_T$ 时有 $20 \lg |G(j\omega)| = 0dB$, 说明高频渐近线

始于点 $(\omega_T, 0)$, 斜率为 $-20dB / dec$ 。在 $\omega = \omega_T$

附近的误差为:

$$e(\omega) = 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2}$$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$



可利用误差修正曲线对上图进行修正，得实际曲线。

讨论II、相频特性特点:

$$\varphi(\omega) = -\arctan T\omega = -\frac{\omega}{\omega_T}$$



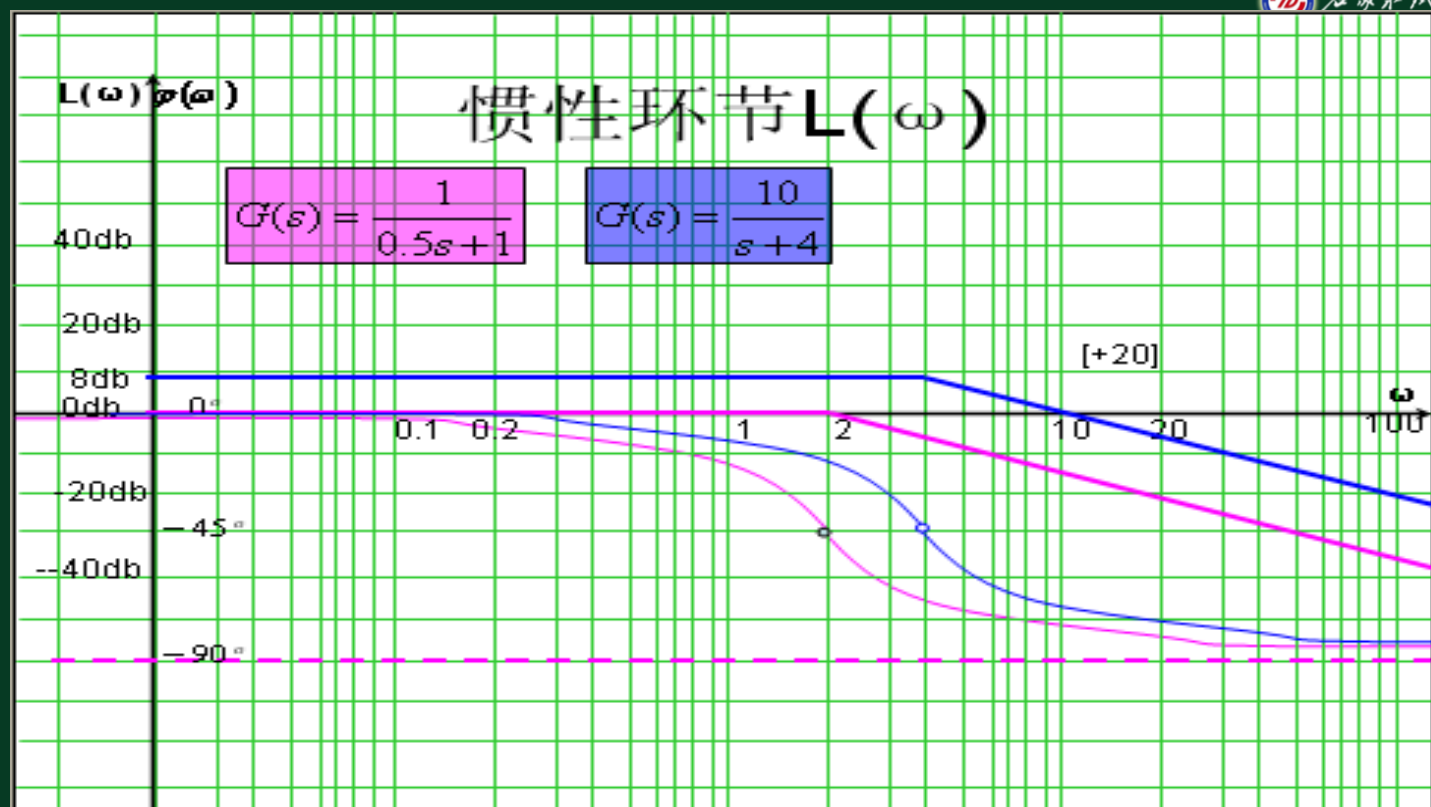
在线开放课程

ω	0	ω_T	∞
$\varphi(\omega)$	0°	-45°	-90°

相频特性对称于点 $(\omega_T, -45^{\circ})$

$$\omega \leq 0.1\omega_T \text{ 时 } \rightarrow 0^{\circ}$$

$$\omega \geq 10\omega_T \text{ 时 } \rightarrow -90^{\circ}$$



⑤一阶微分环节（导前环节）

传函： $G(s) = Ts + 1$ ，频率特性： $G(j\omega) = 1 + jT\omega$ 同样令： $\omega_T = \frac{1}{T}$ ，则 $G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_T} = \frac{\omega_T + j\omega}{\omega_T}$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} - 20 \lg \omega_T \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$

讨论 I：对幅频特性，称 $\omega_T = \frac{1}{T}$ 为转角频率，以其为分界，将频率分为高频段和低频段。在低频段即当

$\omega \ll \omega_T$ 时， $20 \lg |G(j\omega)| \approx 0 \text{dB}$ ，且 $\omega = \omega_T$ 时有：

$20 \lg |G(j\omega)| = 0 \text{dB}$ ，说明低频渐近线是止于点

直线。在 $\omega = \omega_T$ 附近的误差为：
$$e(\omega) = 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} - 20 \lg \omega_T$$

在高频段即当 $\omega \gg \omega_T$ 时有：
$$20 \lg |G(j\omega)| \approx 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_T$$

且 $\omega = \omega_T$ 时有 $20 \lg |G(j\omega)| = 0 \text{dB}$

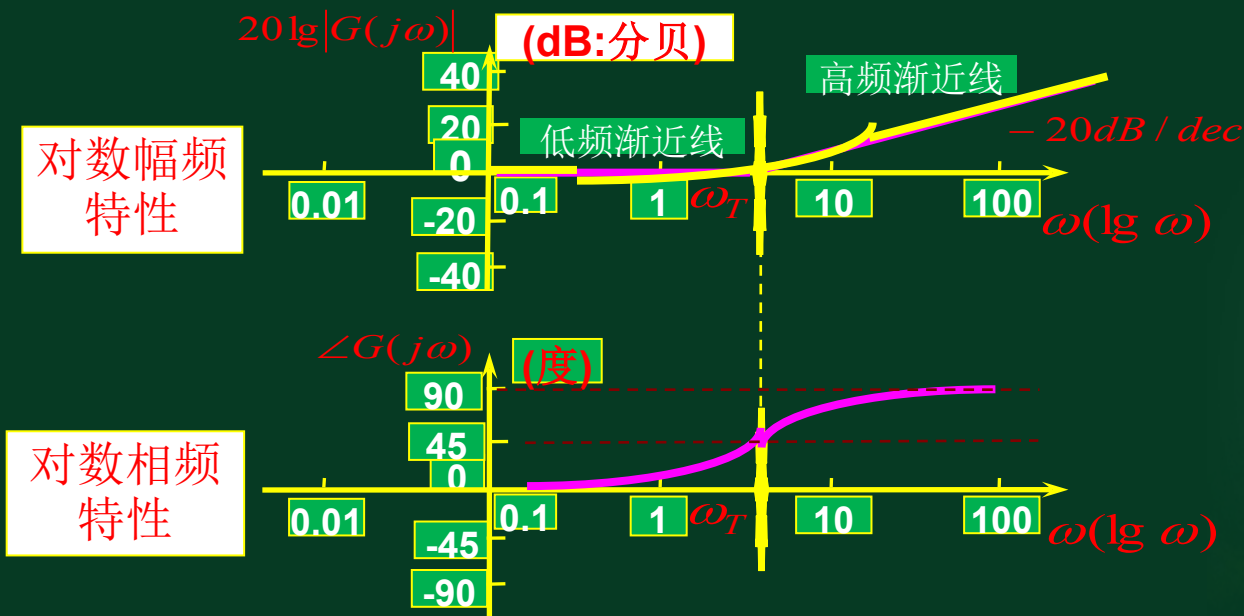
说明高频渐近线是始于点 $(\omega_T, 0)$ ，斜率为 $20 \text{dB} / \text{dec}$

的直线。在 $\omega = \omega_T$ 附近的误差为：

$$e(\omega) = 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} - 20 \lg \omega$$

$$\begin{cases} 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} - 20 \lg \omega_T \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_T} \end{cases}$$

其频率特性与惯性环节相比，只是符号上的差别。



⑥振荡环节（注意坐标）

传函 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ， 频率特性： $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$

分子分母同除以 ω_n^2 ， 并令 $\omega/\omega_n = \lambda$ ， 得：

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

对数幅频特性为：

$$20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}$$

$20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \lambda^2}$,现讨论如下:



I、当 $\omega \ll \omega_n$ 即 $\lambda \approx 0$ 时, $20 \lg |G(j\omega)| \approx 0$, 以 $\omega = \omega_n$ 的点

为分界, 知低频渐近线为止于点 $(1,0)$ 的0dB水平线。在

$\omega = \omega_n$ 附近($\lambda \leq 1$ 时)低频渐近线与实际曲线的误差为:

$$e(\omega) = e(\lambda, \xi) = -20 \lg \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \lambda^2}$$

当 $\omega \gg \omega_n$ 即 $\lambda \gg 1$ 时, 忽略1与 $4\xi^2 \lambda^2$ 得:

$$20 \lg |G(j\omega)| \approx -40 \lg \lambda = -40 \lg \omega + 40 \lg \omega_n$$

高频渐近线为始于点 $(1,0)$,斜率为 $-40\text{dB}/\text{dec}$ 的直线。

在 $\omega = \omega_n$ 附近($\lambda \geq 1$ 时)低频渐近线与实际曲线的误差为:

$$e(\omega) = e(\lambda, \xi) = 40 \lg \lambda - 20 \lg \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \lambda^2}$$

讨论II、相频特性特点:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

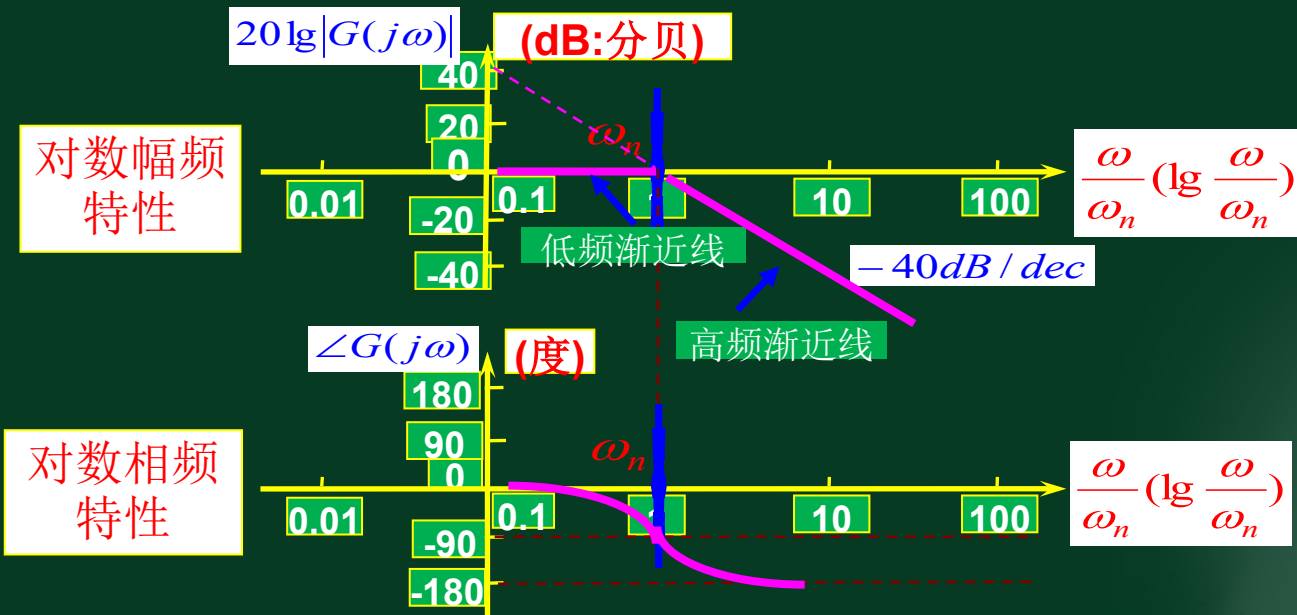
ω	0	ω_n	∞
λ	0	1	∞
$\varphi(\omega)$	0^0	-90^0	-180^0

相频特性对称于点 $(1, -90^0)$, 在 $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0.1$ 时趋于 0^0 , 在

$\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 10$ 时趋于 -180^0 。

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$



可利用误差修正曲线对上图进行修正，得实际曲线。

谐振频率

$0 < \xi < 0.707$ 时存在

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

ξ 越小, ω_r 越接近 ω_n

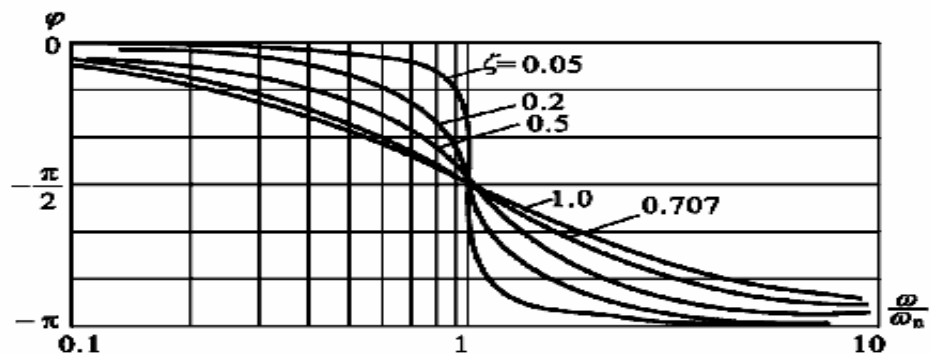
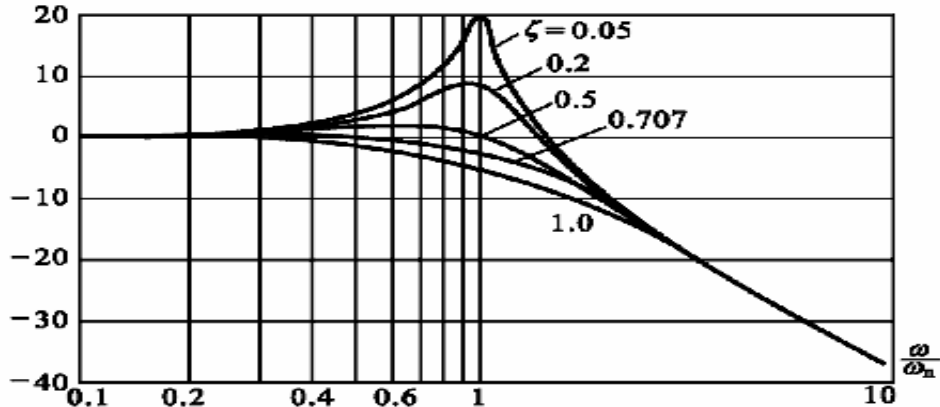
谐振峰值

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

ξ 越小, M_r 越大。

$\xi \rightarrow 0$ 时, $M_r \rightarrow \infty$ 。

$20\lg|G|/\text{dB}$

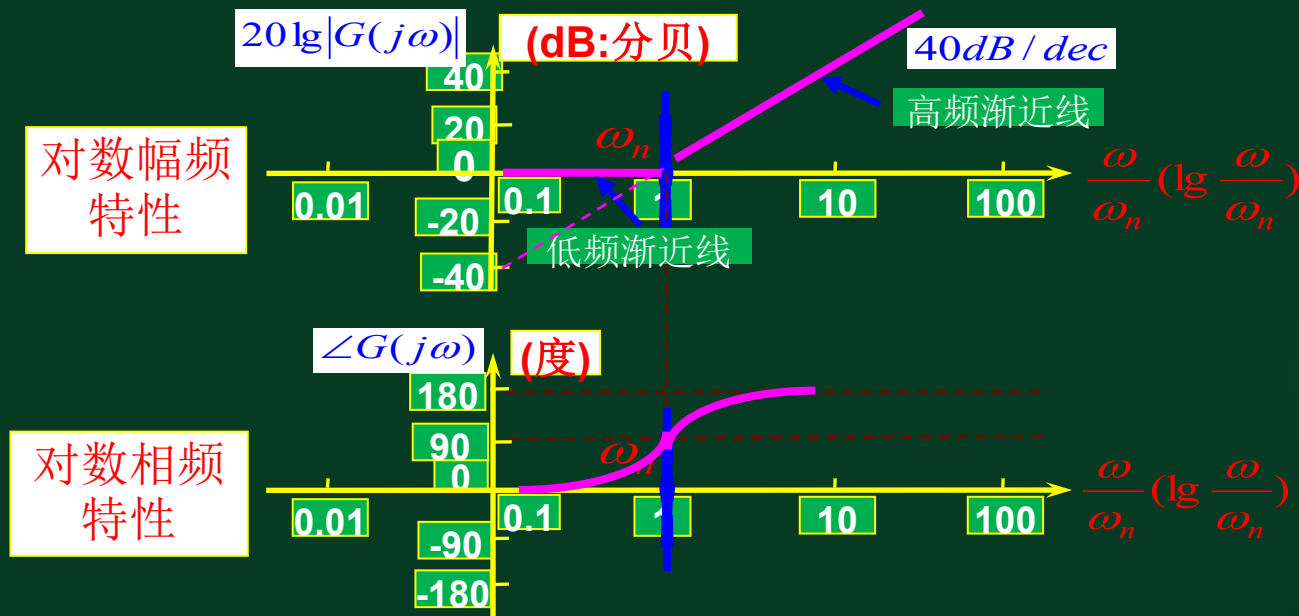


⑦二阶微分环节

课程

传函 $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1$, 频率特性: $G(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j\frac{2\omega\xi}{\omega_n} + 1$

其特性与振荡环节只有符号上的差别, 见下图。



⑧延时环节

传函为：

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

，频率特性为：

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

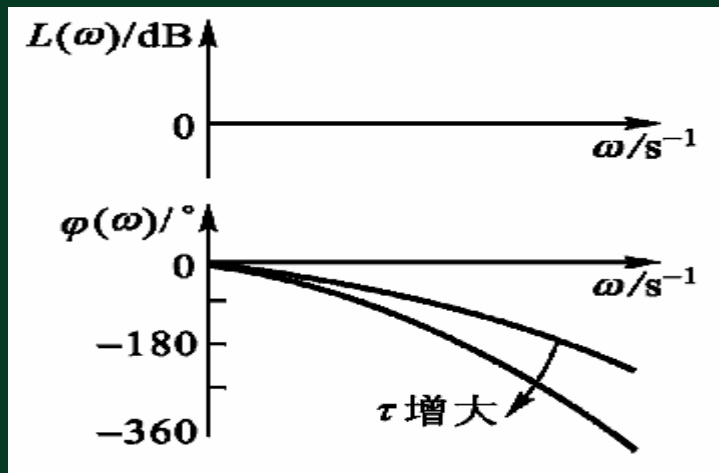
$$|G(j\omega)| = 1,$$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega,$$

$$20 \lg |G(j\omega)| = 0 \text{ dB},$$

，即对数幅频特性

为水平线，相频特性为一曲线。



(4)绘制bode图的步骤与实例

①**叠加法**：先作出系统各环节bode图然后进行叠加。

(2)**直接法**：绘制系统对数幅频特性曲线的顺序斜率法。

从典型环节的对数幅频特性可见，在低频段，惯性、振荡和比例微分等环节的低频渐近线，均为零分贝线。因此，对数幅频特性曲线图可以采用直接法一次绘制而成。

对数幅频特性曲线的顺序斜率法作图步骤如下：



在线开放课程

①将系统的传递函数转化成由若干个典型环节传递函数相乘的形式；由传递函数求出频率特性；

②确定各典型环节的特征参数(如比例系数 K 、转折频率)；将转折频率由低到高依次标在横坐标轴上；

③绘制对数幅频特性的低频段渐近线---

在 $\omega=1$ 处的幅值为 $20\lg K$ ；

④按转折频率由低频到高频的顺序，在低频渐近线的基础上，每遇到一个转折频率，根据环节的性质改变渐近线斜率，绘制渐近线，到转折频率最高的环节为止。

⑤必要时应对对数幅频特性曲线进行修正。

小结



在线开放课程

