



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的频率特性分析

频率特性的图示方法(1)

主讲：牛江川

4.2 频率特性的图示方法

如前所述，频率特性的数学描述方法较多，既可以用指数表达式或幅角表达式去描述，还可以用实数部分和虚数部分所组合而成的复数表达式来描述。

将频率特性绘制成一些曲线，再从这些曲线出发进行研究，

即控制工程中的**图解分析法**。

工程中常用的频率特性图示法有三种，如下表4.1所示，

本节主要介绍前面的两种。

表4.1 常用频率特性曲线及其坐标

序号	名称	图形常用法	坐标系
1	幅相频率特性曲线	极坐标图 /Nyquist图	极坐标
2	对数幅频特性、 对数相频特性曲线	对数坐标图/Bode 图	半对数坐标
3	对数幅相频率特性曲线	对数幅相图/尼柯 尔斯图	对数幅相坐标

4.2 频率特性的图示方法

1、频率特性的极坐标图

频率特性的极坐标图又称为Nyquist图，也称幅相频率特性曲线。

因 $G(j\omega)$ 是 ω 的复变函数，故可在复平面内用复矢量表示。用幅值 $|G(j\omega)|$

表示矢量的长度，与实轴的夹角为其相位 $\varphi(\omega)$ ，在实轴和虚轴上的

投影分别为其实部和虚部。相位 $\varphi(\omega)$ 的符号规定从正实轴开始，

逆时针方向旋转为正，顺时针方向旋转为负。

当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 时， $G(j\omega)$ 端点的轨迹即频率特性的极坐标图。

如下图4.2.1，频率特性的极坐标图不仅表示了幅频特性和相频特性，也表示了实频特性和虚频特性，要注意图中带 ω 箭头所指的方向为 ω 从小到大的方向。

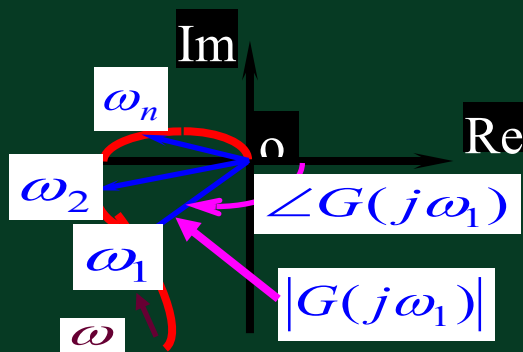


图4.2.1 频率特性极坐标图

(1)典型环节的Nyquist图

①比例环节

比例环节传函为：

$$G(s) = k$$

其频率特性：

$$G(j\omega) = k$$

显然，比例环节的实频特性为恒为 k ，虚频特性为 0 ，幅频特性 $|G(j\omega)| = K$ ，相频特性为 $\varphi(\omega) = 0^\circ$ 。其Nyquist图为实轴上的一个定点，坐标为 $(K, j0)$ 如图4.2.2所示。

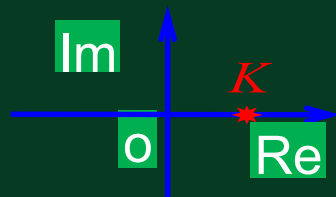


图4.2.2 比例环节Nyquist图

②积分环节

传函: $G(s) = \frac{1}{s}$, 频率特性: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega}j$

显然积分环节的实频特性恒为0, 虚频特性为 $-\frac{1}{\omega}$

故幅频特性为 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$, 相频特性为 $\varphi(\omega) = -90^\circ$

ω 从0 $\rightarrow\infty$ 时, $G(j\omega)$ 幅值从 $\infty\rightarrow 0$, 相位保持不变。

如图4.2.3所示,积分环节的Nyquist图为虚轴的下半轴, 从无穷远指向原点(具有恒定的相位滞后)。

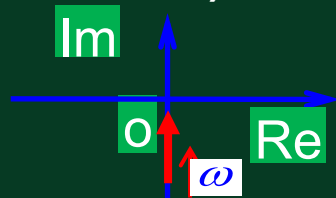


图4.2.3 积分环节Nyquist图

③微分环节

传函： $G(s) = s$ ，频率特性： $G(j\omega) = j\omega$ 。

显然积分环节的实频特性恒为0，虚频特性为 ω

故幅频特性为 $|G(j\omega)| = \omega$ ，相频特性为 $\varphi(\omega) = 90^\circ$ 。

ω 从0 $\rightarrow\infty$ 时， $G(j\omega)$ 幅值从0 $\rightarrow\infty$ ，相位保持不变。

如图4.2.4所示,积分环节的Nyquist图为虚轴的上半轴，
从原点指向无穷远点(具有恒定的相位超前)。

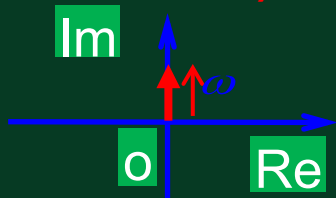


图4.2.4 微分环节Nyquist图

④惯性环节（一阶积分）

传函： $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ ，频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1} = \frac{K}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

显然，惯性环节的实频特性为 $\frac{K}{1 + T^2\omega^2}$ ，虚频特性为

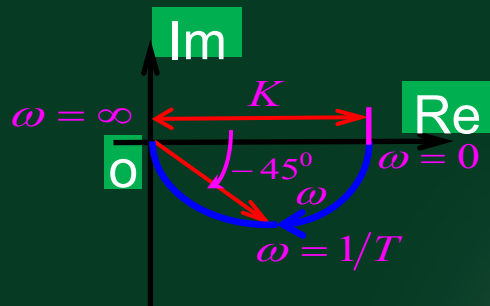
$-\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}$ ，故幅频特性为 $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$ ，相频特性为

$\varphi(\omega) = -\arctan T\omega$ 。可对 ω 取特值如下：

ω	0	$1/T$	∞
$ G(j\omega) $	K	$K/\sqrt{2}$	0
$\varphi(\omega)$	0°	-45°	-90°

ω	0	$1/T$	∞
$ G(j\omega) $	K	$K/\sqrt{2}$	0
$\varphi(\omega)$	0°	-45°	-90°

ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 时，惯性环节的Nyquist图为正实轴下的一个半圆，圆心为 $(K/2, 0)$



半径为 $K/2$ ，如图4.2.2所示。

图4.2.2 惯性环节Nyquist图

从图可以看出，惯性环节频率特性的幅值随着频率的增大而减小，因而具有低通滤波的性能。其相位存在滞后，最大相位滞后为 90° 。

⑤一阶微分环节（超前环节）

传函： $G(s) = Ts + 1$ 频率特性： $G(j\omega) = 1 + jT\omega$ 在线开放课程

幅频特性为 $|G(j\omega)| = \sqrt{1 + T^2\omega^2}$,相频特性为 $\varphi(\omega) = \arctan T\omega$ 。

可对 ω 取特值如下：

ω	0	$1/T$	∞
$ G(j\omega) $	1	$\sqrt{2}$	∞
$\varphi(\omega)$	0^0	45^0	90^0

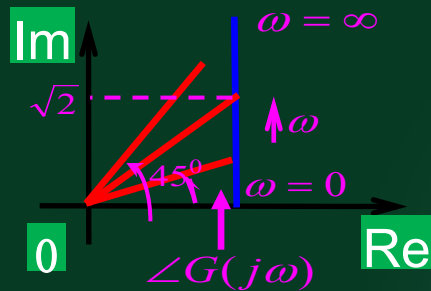


图4.2.3 一阶微分环节Nyquist图

一阶微分环节的Nyquist图始于点 $(1, j0)$ ，平行于虚轴，是第一象限内的一条垂线，如上图所示。

⑥振荡环节

传函: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 频率特性: $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$

分子分母同除以 ω_n^2 并令 $\omega/\omega_n = \lambda$ 得:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1-\lambda^2) + j2\xi\lambda} = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2} - j\frac{2\xi\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}$$

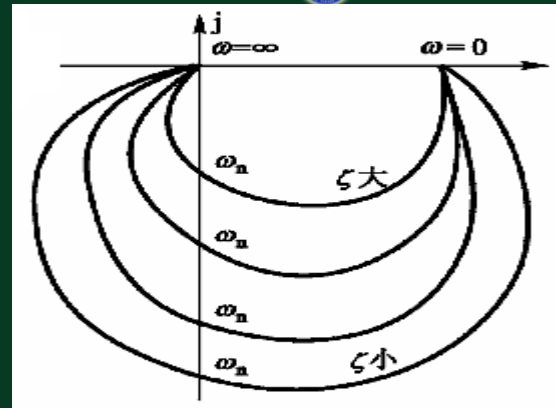
显然, 惯性环节的实频特性为 $\frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}$, 虚频特性为

$\frac{-2\xi\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}$, 幅频特性为 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}}$, 相频特性为

$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$ 可对 ω 取特值如下:

ω	0	ω_n	∞
λ	0	1	∞
$ G(j\omega) $	1	$1/2\xi$	0
$\varphi(\omega)$	0	-90°	-180°

ω	0	ω_n	∞
λ	0	1	∞
$ G(j\omega) $	1	$1/2\xi$	0
$\varphi(\omega)$	0	-90°	-180°



当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 即 $\lambda \rightarrow \infty$ 时， $G(\omega)$ 的幅值从 $1 \rightarrow 0$ ，相位从 $0 \rightarrow -180^\circ$ 。

Nyquist图始于点 $(1, j0)$ ，曲线与虚轴交点的频率为系统的无阻尼固有频率 ω_n ，此时的幅值为 $1/2\xi$ ，曲线在第三、四象限，且随着 ξ 取值的不同，Nyquist图的形状也不同，如图4.2.7所示。

当 $\xi < 0.707$ 时, 幅频特性在 $|G(j\omega)|$ 在频率 ω_r 处或频率比

$\lambda_r = \omega_r / \omega_n$ 出现峰值, 可通过 $G(j\omega)$ 对 λ 求导而得, 如图4.2.7

(b)所示, 此峰值称为谐振峰值, 频率 ω_r 称为谐振频率。

此时有 $\lambda_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ 或 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$, 幅值为

$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}}$, 相位 $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\xi}$, 而当 $\xi \geq 0.707$

时, 一般认为谐振频率不再存在。

⑦ 延时环节

传函为：

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

频率特性为：

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega$$

显然，延时环节的实频特性为 $\cos \tau\omega$ ，虚频特性为

$-\sin \tau\omega$ ，幅频特性 $|G(j\omega)| = 1$ ，相频特性为 $\varphi(\omega) = -\tau\omega$ ，

其Nyquist图为以原点为原心的单位圆。

(2) Nyquist图的一般形状

绘制准确的Nyquist图是比较麻烦的，可借助于计算机进行逐点描绘。一般情况下，可绘制概略的Nyquist曲线，只要求在所研究的点附近有足够的安全性。其绘制的一般步骤如下：

- ①由传递函数求出其实频特性、虚频特性、幅频特性、相频特性的表达式；
- ②求出若干特征点，如起点、终点、与实轴、虚轴的交点等，

并标注在极坐标上。

③补充必要的一些点，并根据特征点的变化趋势及所处的象限，绘出Nyquist图的一般形状。

下面举例说明 (P135)

例3 已知系统的传函为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

, 试绘制其Nyquist图。

解:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT\omega)} = \frac{-KT}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{K}{\omega(1 + T^2\omega^2)}$$

实频特性为 $\frac{-KT}{1 + T^2\omega^2}$, 虚频特性为

$$-\frac{K}{\omega(1 + T^2\omega^2)}$$

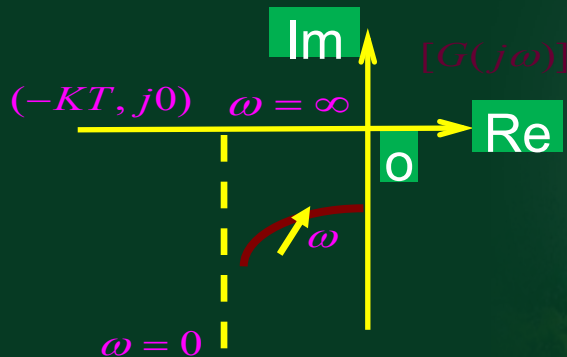
幅频特性为

$$\frac{K}{\omega\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

, 相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan T\omega$$

ω	$u(\omega)$	$v(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	-KT	$-\infty$	∞	-90°
∞	0	0	0	-180°



例4 已知系统的传函为

$$G(s) = \frac{K}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

, 绘制其Nyquist图。



在线开放课程

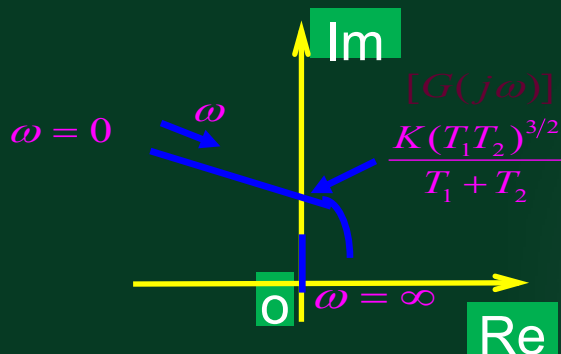
解:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega$$

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	∞	-180°
∞	0	-360°



思考: 含一个或多个积分环节情况下, 曲线从哪开始?

例5 已知系统传函 $G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$ ($T_1 > T_2$), 试绘制其Nyquist图。

解:

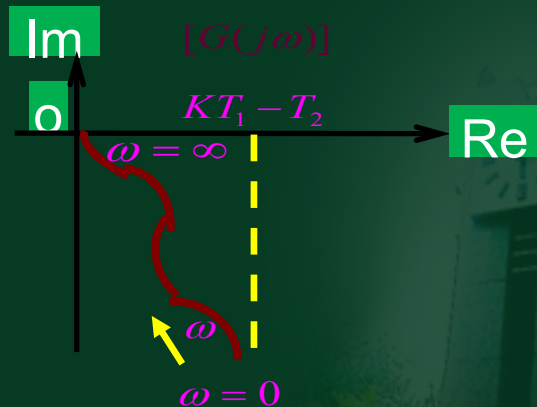
$$G(j\omega) = \frac{K(1+jT_1\omega)}{j\omega(1+jT_2\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega$$

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	∞	-90°
∞	0	-90°

思考: 因实频特性大于零, 虚频特性小于零, 曲线位于第四象限。若此例中 $T_1 < T_2$ 情况如何?



总结如下：对系统频率特性的一般式

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)\dots(1 + j\tau_m\omega)}{(j\omega)^v(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)\dots(1 + jT_{n-v}\omega)}, n > m$$

对各型系统的nyquist图的一般形状总结如下：

(1)当 $\omega=0$ 时，对**0**型系统，幅频特性为**K**，相频特性为**0**度，nyquist图起始点是一正实轴上的实数点；

对**I**型系统，幅频特性为 ∞ ，相频特性为**-90**度，在低频段，nyquist曲线的渐近线为平行于负虚轴的直线；

对**II**型系统，幅频特性为 ∞ ，相频特性为**-180**度，在低频段，频率特性的负实部是比虚部阶数更高的无穷大。

(2)当 $\omega= \infty$ 时，对**0**、**I**、**II**型系统，幅频特性为零，相频特性为**-(n-m)**倍的**90**度。传递函数含振荡环节时不改变上述结论。

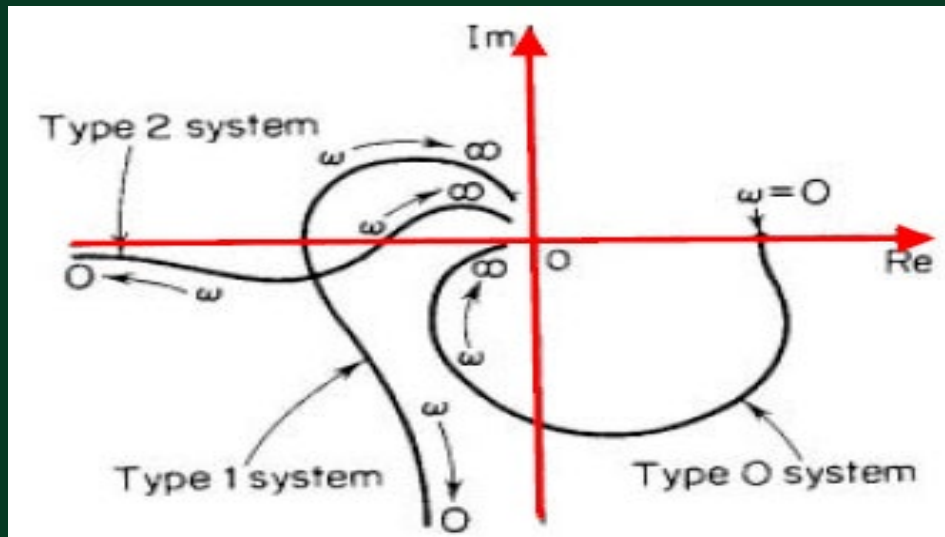
(3)当传递函数含有导前环节时，由于相位的单调下降，nyquist曲线将发生弯曲。

在线开放课程

$$G(j0) = \frac{K}{j^\lambda \omega^\lambda} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \begin{cases} Ke^{j0}, & \lambda = 0 \\ \infty e^{j(-\frac{\pi}{2})}, & \lambda = 1 \\ \infty e^{j(-\pi)}, & \lambda = 2 \\ \infty e^{j(-\frac{3\pi}{2})}, & \lambda = 3 \end{cases}$$

$$G(j\infty) = \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \begin{cases} 0e^{j(-\frac{\pi}{2})}, & n-m=1 \\ 0e^{j(-\pi)}, & n-m=2 \\ 0e^{j(-\frac{3\pi}{2})}, & n-m=3 \\ 0e^{j(0)}, & n-m=4 \end{cases}$$

典型环节的Nyquist图一般形状



小结



在线开放课程

