石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的频率特性分析

频率特性概述

主讲 ： 牛江川

本章基本要求

(1)掌握频率特性的定义和代数表示法及其与传递函数之间的相互关系；掌握频率特性和频率响应的求法。

(2)掌握频率特性的Nyquist和Bode图的组成原理，熟悉典型环节的Nyquist和Bode图的特点及其绘制，掌握一般系统的Nyquist和Bode图的特点和绘制。

本章基本要求

(3)掌握频域中性能指标的定义和求法。

(4)了解最小相位系统和非最小相位系统的概念。

(5)学会利用matlab仿真分析控制系统频率特性。

前面我们学习了系统的数学模型：时间域中的微分方程/差分方程；复数域中的传递函数；今天我们开始学习系统的另一种数学模型，即频率域中的频率特性。与传递函数一样，频率特性仅适用于线性定常系统。

频率特性分析方法是控制理论中研究和分析系统特性的主要方法。它将传递函数从复数域引到频率域，使系统数学模型的物理概念明确化。

那么引入频率特性分析方法有什么意义呢？

□意义

①使用频率特性分析法可将任意信号分解为叠加的谐波信号（对信号进行傅立叶级数分解得到的一系列非基波频率的各次波），

其中，可将周期信号分解为叠加的频谱离散的谐波信号，

将非周期信号分解为叠加的频谱连续的谐波信号。

②对于无法利用分析法求得传递函数或微分方程的系统，可以先求出其频率特性，进而求出其传递函数。

同时，在系统微分方程或传递函数已知的情况下，也可以经过试验求出系统的频率特性，对系统的传递函数进行检验和修正。

③频域法是一种工程上广为采用的分析和综合系统间接方法。

除了电路与频率特性有着密切关系外，在机械工程中机械振动与频率特性也有着密切的关系。机械受到一定频率作用力时产生强迫振动，由于内反馈还会引起自激振动。机械振动学中的共振频率、频谱密度、动刚度、抗振稳定性等概念都可归结为机械系统在频率域中表现的特性。

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

4.1 频率特性概述

1、频率响应与频率特性

(1)频率响应的定义

线性定常系统对谐波输入的稳态响应为频率响应。确切地说频率响应是指正弦输入情况下系统的稳态响应。当输入正弦信号时，线性系统输出稳定后也是正弦信号，其输出正弦信号的频率与输入正弦信号的频率相同；输出幅值和输出相位按照系统传递函数的不同，随着输入正弦信号频率的变化而有规律的变化。

对于稳定的线性定常系统，其响应包含瞬态响应和稳态响应。

若对其输入一谐波信号：

$$x_i(t) = X_i \sin \omega t$$

由微分方程的解的理论知，系统的输出为同一频率的谐波信号，但其幅值和相位发生了变化：**输出谐波的幅值**与输入谐波的幅值成正比，为输入谐波频率ω的非线性函数 $A(\omega)$，

输出谐波的相位与输入谐波的幅值无关，它与输入谐波的相位之差也是输入谐波频率ω的非线性函数 $\varphi(\omega)$，即线性定常系统对谐波输入的响应为：

$$x_o(t) = A(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

系统及其稳态响应的输入输出波形如下图所示：

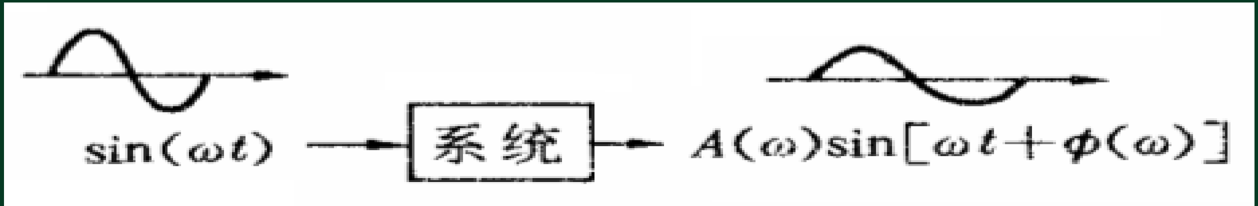

图4.1.1系统及其稳态响应的输入输出波形

下面举例说明系统的频率响应。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

例1 设系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$

输入信号为 $x_i(t)=X_i\sin\omega t$

得 $X_o(s)=X_i(s)G(s)=\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\dfrac{K}{Ts+1}$

经拉氏逆变换得系统输出为：

$$x_o(t)=\frac{X_iKT\omega}{1+T^2\omega^2}\cdot e^{-\frac{t}{T}}+\frac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\arctan T\omega)$$

因系统是稳定的，故随着时间的推移，瞬态响应项衰减为零，

输出只保留其稳态响应：

$$x_o(t)=\frac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\arctan T\omega)$$

$$x_o(t) = \frac{X_i K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t - \arctan T\omega)$$

从上式可知，系统的稳态响应的幅值与系统的参数即比例系数K、时间常数T以及输入谐波的幅值 X_i 、频率 ω 有关；稳态响应的频率不变，产生的相位差为：

$$\varphi(\omega) = -\arctan T\omega$$

显然，系统的频率响应只是时间响应的一个特例，它提供了系统稳态响应的幅值和相位随输入谐波幅值、频率变化的特性。

(2)频率响应的求法

不失一般性，设系统的传递函数中比例系数K为1，则

$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$，系统的稳态响应为：

$$x_o(t)=\frac{X_i}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\arctan T\omega)$$

对系统输出、输入正弦信号的幅值比A(ω)，相位φ(ω)差进行研究发现：

其输出谐波的幅值和相位与系统的参数和输入正弦信号的特性有关。

其稳态输出与输入的幅值比是输入信号频率ω的函数，

称系统的幅频特性：$A(\omega)=\dfrac{X_o(\omega)}{X_i}=\dfrac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$

幅频特性：$$A(\omega)=\frac{X_o(\omega)}{X_i}=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

它描述了系统在稳态条件下，当系统输入不同频率的谐波信号时，其幅值的衰减或增大特性；稳态输出信号与输入信号的相位差φ(ω)也是ω的函数，称其为系统的相频特性，它描述了系统在稳态条件下，当系统输入不同频率的谐波信号时，其相位产生的超前或滞后。

规定φ(ω)按逆时针方向旋转为正值。

对于物理系统，相位一般是滞后的，相频特性为：

$$\varphi(\omega)=-\arctan T\omega$$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

幅频特性：

$$A(\omega)=\frac{X_o(\omega)}{X_i}=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

相频特性：

$$\varphi(\omega)=-\arctan T\omega$$

系统的幅频特性和相频特性如下图4.1.2所示：

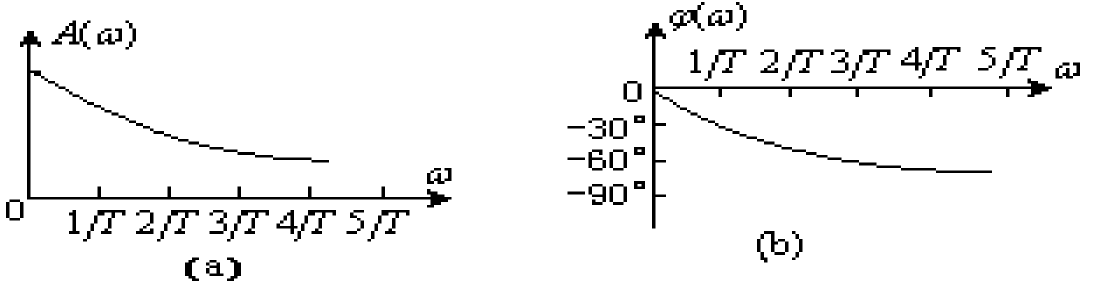

图 4.1.2 频率特性曲线
(a) 幅频特性　(b)相频特性

综上所述，可对频率特性作如下定义：线性定常系统的频率特性是在稳态条件下，稳态输出正弦信号与输入正弦信号的复数比，它用 $G(j\omega)$ 表示，即：

$$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)\cdot\angle\varphi(\omega)$$

亦即频率特性为 ω 的复变函数，它描述了在不同频率下系统传递正弦信号的能力。

$G(j\omega)$ 除了可用指数形式上和幅角形式外，也可写成实部和虚部之和，即：

$$G(j\omega)=\mathrm{Re}[G(j\omega)]+\mathrm{Im}[G(j\omega)]=u(\omega)+jv(\omega)$$

$$G(j\omega)=\mathrm{Re}[G(j\omega)]+\mathrm{Im}[G(j\omega)]=u(\omega)+jv(\omega)$$

上式中，$u(\omega)$频率特性的实部，称为实频特性（测试技术中称为同相分量），$v(\omega)$是频率特性的虚部，称为虚频特性（测试技术中称为异相分量）。

显然有：

$$u(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega),v(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

$$A(\omega)=\sqrt{u^2(\omega)+v^2(\omega)},\varphi(\omega)=\arctan\frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

系统的频率特性可根据定义由实验方法求得。

2、频率特性与传递函数的关系

设系统传递函数的一般形式为：

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

当输入为 $x_i(t)=X_i\sin\omega t$ 时，输出函数的拉氏变换为：

$$X_o(s)=X_i(s)G(s)$$
$$=\frac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

下面求其输出。

$$X_o(s)=X_i(s)G(s)=\frac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

①不失一般性，设系统的传递函数的所有极点都是互不相同的实数，即无重根，则上式可以写成：

$$X_o(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-s_i}+\left(\frac{B}{s-j\omega}+\frac{B^*}{s+j\omega}\right)$$

式中，s_i 为系统特征方程的特征根，A_i、B、B^* 为待定系数（B、和 B^* 互为共轭复数），从而得：

$$x_o(t)=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{s_it}+\left(Be^{j\omega t}+B^*e^{-j\omega t}\right)$$

对于稳定的系统，其瞬态分量当$\omega\to\infty$时衰减为零，

得系统的稳态响应为：$x_o(t)=Be^{j\omega t}+B^*e^{-j\omega t}$

②若系统含有k重极点 s_i ，由 $L^{-1}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ 得：

$$L^{-1}[t^n e^{s_i t}]=\frac{n!}{(s-s_i)^{n+1}}$$

系统的输出中将含有 $t^k e^{s_j t}$ $(k=1,2,\cdots k-1)$ 这样一些项。

对于稳定的系统，由于系统传递函数的极点的实部为负，各项随着ω→∝也都要趋于零，稳态响应与不含重极点的情况相同。

下面求待定系数 B、B^*。

$$B=G(s)\frac{X_i\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=G(s)\frac{X_i\omega}{s+j\omega}\Big|_{s=j\omega}=G(j\omega)\cdot\frac{X_i}{2j}=$$

$$=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}\cdot\frac{X_i}{2j}$$,同理可得：

$$B^*=G(s)\frac{X_i\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=G(s)\frac{X_i\omega}{s-j\omega}\Big|_{s=-j\omega}=$$

$$=G(-j\omega)\cdot\frac{X_i}{-2j}=|G(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)}\cdot\frac{X_i}{-2j}$$

上式中，因 $G(j\omega)$ 与 $G(-j\omega)$ 互为共轭(幅值等相位反),

$$G(-j\omega)=|G(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)}$$

由此得到系统的稳态响应为： $x_{os}=\lim_{t\to\infty}x_o(t)=$

$$=|G(j\omega)|X_i\frac{e^{j[\omega t+\angle G(j\omega)]}-e^{-j[\omega t+\angle G(j\omega)]}}{2j}$$

$$=|G(j\omega)|X_i\sin[\omega t+\angle G(j\omega)]$$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

由定义，系统的幅频特性和相频特性分别为：

$$A(\omega)=\frac{X_o(\omega)}{X_i}=\frac{|G(j\omega)|X_i}{X_i}=|G(j\omega)|,\varphi(\omega)=\omega t+\angle G(j\omega)-\omega t=\angle G(j\omega)$$

由于对系统传递函数而言，当 $s=\sigma+j\omega$ 中 $\sigma=0$ 时，$s=j\omega$ 可得：$G(s)\big|_{s=j\omega}=G(j\omega)$ 也是一个复数，可以写成：

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

可以看出，传递函数与频率特性的关系为：

$$G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}$$

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$$

传递函数的复变量s用$j\omega$代替后，传递函数就变为频率特性。

它是传函的特例，是定义在复平面虚轴上的传递函数。

频率特性的量纲就是传递函数的量纲，也是输出信号

与输入信号的量纲之比。

它同前面介绍的微分方程、传递函数、脉冲响应函数等一样，

也是线性控制系统的数学模型。

3、频率特性的求法

本节介绍频率特性的三种求法。

①根据系统的频率特性来求取

已知系统的传函，据输入谐波信号求得系统的稳态响应，然后按定义得到其频率特性。

②将传递函数中的s用jω代替来求取

对系统传递函数而言,系统的频率特性就是其复变量 $s=\sigma+j\omega$ 在 $\sigma=0$ 时的特例，这样，将系统的传递函数 G(s)中的s用jω代替，就得到系统的频率特性 。

$G(j\omega)$ 也称为谐波传递函数。

③用实验方法求取

在不知道系统的传递函数或微分方程等数学模型时，无法用上面所述方法来求取系统的频率特性，但可以通过实验的方法，利用频率特性的定义来求得。

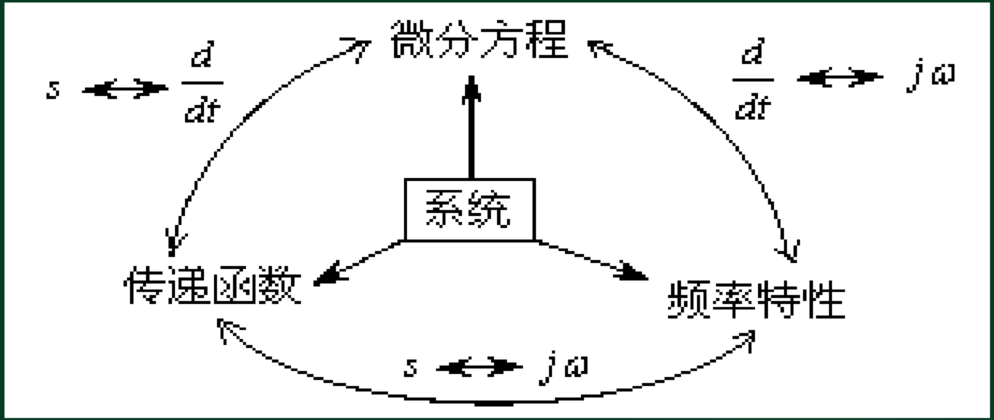

图4.1.3

综上所述，一个系统既可以用微分方程或传递函数来描述，也可以用频率特性来描述，它们之间的关系如图4.1.3所示。将微分方程中的微分算子 d/dt 换成s后，得到系统的传函，而将传函中的s再换成jω，传递函数就变成了频率特性；反之亦然。

4、频率特性的特点和作用

频率特性分析方法始于20世纪40年代，目前已广泛应用于机械、电气、液压、气动等系统，成为经典控制理论中分析线性定常系统的基本方法之一。

系统的频率特性分析法有以下优点：

(1)由于有 $X_o(s)=X_i(s)G(s)$，故有 $X_o(j\omega)=X_i(j\omega)G(j\omega)$。
当 $X_i(s)=\delta(t)$ 时，$x_o(t)=w(t)$。

又因 $X_i(s)=X_i(j\omega)=1=F[\delta(t)]$，故有 $X_o(j\omega)=G(j\omega)$。
$F[w(t)]=G(j\omega)$。

这说明系统的频率特性就是系统单位脉冲响应的fourier变换，故系统的频率特性又可定义为线性定常系统的输出量的傅氏变换与输入量的傅氏变换之比。

(2)时间响应分析主要用于分析线性系统的过渡过程，以获得系统的动态特性;

频率特性分析则通过分析不同谐波输入时系统的稳态响应，以获得系统的动态响应。

(3)研究系统的结构与参数的变化对系统性能的影响时，多数情况下在频域中分析比在时域中分析容易些；

(4)对阶次较高的系统或难于得到微分方程的系统，用频率特性分析方法比较容易；

(5)若系统在输入信号的同时，在某些频带中存在严重的干扰，采用频率分析法，通过设计合适的通频带，可以抑制噪声的影响。

频率特性分析法缺点：由于实际系统往往存在非线性，导致系统输出的谐波信号不是严格的，造成所得到的频率分析结果误差较大；较难应用于时变系统、多输入-输出系统以及对系统的在线识别。

小结