石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的时间响应分析

系统误差分析与计算

主讲 ： 牛江川

3.6系统误差分析与计算

一. 误差、稳态偏差与稳态误差

系统的误差是指期望的输出与实际输出之间的差。

由于系统的输出量由瞬态响应和稳态响应构成，

所以系统误差也分为瞬态误差和稳态误差，

它们都是由系统本身的结构和输入量及其导数的连续变化引起的。

1、系统的误差与偏差

设控制系统的理想输出为 $x_{0r(t)}$ ，实际输出为 $x_{0(t)}$ ，

则系统误差定义为：$e(t)=x_{0r}(t)-x_{0}(t)$

其拉氏变换为：$E_1(s)=X_{0r}(s)-X_{0}(s)$

相比之下，系统的偏差是在输入端定义的，即系统的输入与反馈之差：

$\varepsilon(t)=x_i(t)-b(t)$

其拉氏变换为：$E(s)=X_i(s)-B(s)$

□系统的误差和偏差之间的关系

引入反馈的目的是利用偏差对系统的输出进行控制，当输出等于理想输出时系统的偏差为零。故当

$X_{0r}(s)=X_0(s)$时，有：

$$E(s)=X_i(s)-B(s)=X_i(s)-X_0(s)H(s)=X_i(s)-X_{0r}(s)H(s)=0$$

$$X_{0r}(s)=\frac{1}{H(s)}X_i(s)$$

又 $E_1(s)=X_{0r}(s)-X_0(s)$

得二者关系为：

$$E_1(s)=\frac{1}{H(s)}E(s)$$

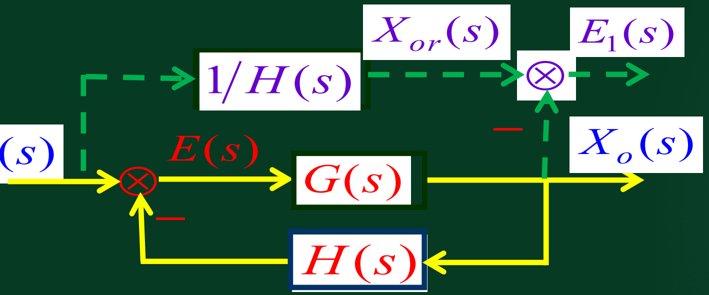


图3-34误差与偏差关系框图

◆单位反馈系统的误差等于其偏差

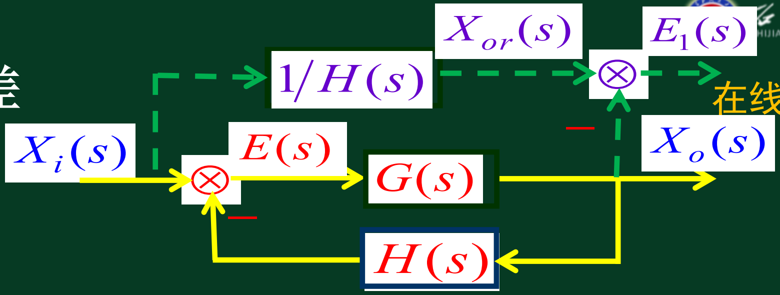
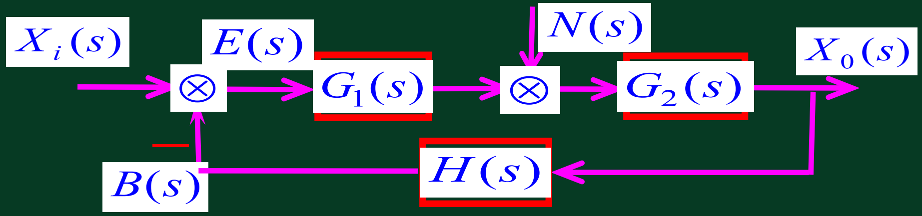


图3-34误差与偏差关系框图

2、误差e(t)的一般计算

以如下常用典型反馈控制系统为例：

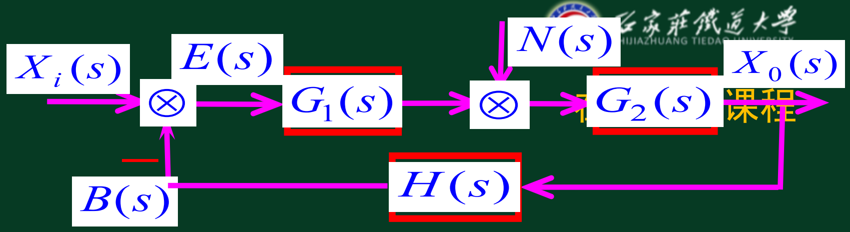


反馈控制系统的典型结构

求给定输入和扰动输入同时作用下的系统总误差。

设输入与输出之间、干扰与输出之间传函分别为：

$G_{X_i}(s)$、$G_N(s)$，则有：



反馈控制系统的典型结构

$$X_0(s)=G_{X_i}(s)X_i(s)+G_N(s)N(s)$$
$$=\frac{G_1(s)G_2(s)X_i(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}+\frac{G_2(s)N(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}$$

，由于 $X_{0r}(s)=\frac{1}{H(s)}X_i(s)$

设 $\Phi_{X_i}(s)=\frac{1}{H(s)}-G_{X_i}(s)$，$\Phi_N(s)=-G_N(s)N(s)$ 得：

$$E_1(s)=X_{0r}(s)-X_0(s)=\frac{X_i(s)}{H(s)}-G_{X_i}(s)X_i(s)-G_N(s)N(s)$$
$$=[\frac{1}{H(s)}-G_{X_i}(s)]X_i(S)+[-G_N(s)N(s)]=\Phi_{X_i}(s)X_i(S)+\Phi_N(s)$$

$$E_1(s)=X_{0r}(s)-X_0(s)=\frac{X_i(s)}{H(s)}-G_{X_i}(s)X_i(s)-G_N(s)N(s)$$

$$=[\frac{1}{H(s)}-G_{X_i}(s)]X_i(S)+[-G_N(s)N(s)]=\Phi_{X_i}(s)X_i(S)+\Phi_N(s)$$

上式中，称 $G_{X_i}(s)$ 为无干扰信号[$n(t)=0$]时误差[$e(t)$]对输入信号[$x_i(t)$]的传函，$G_N(s)$ 为无输入信号时[$x_i(t)=0$]误差对干扰信号的传函， 二者总称为误差传递函数，反映了系统的结构与参数对误差的影响。

3、系统的稳态误差与稳态偏差

由终值定理可得：稳态误差为：

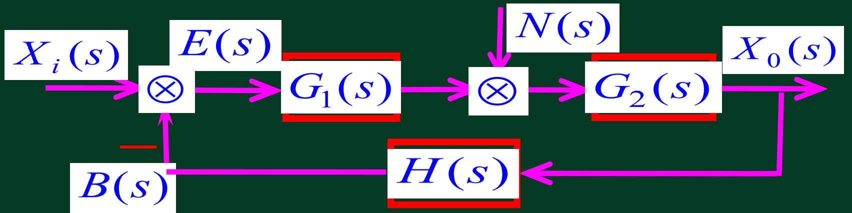
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE_1(s)$$

稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

4、与输入有关的稳态偏差

分析右图所示系统知：



反馈控制系统的典型结构

$$E(s)=X_i(s)-H(s)X_0(s)=X_i(s)-H(s)G(s)E(s)$$

$$\therefore E(s)=\frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=$$

$$\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)$$

设系统的开环传递函数为：

$$G_K(s) = G(s)H(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{s^{\gamma}\prod_{j=1}^{n}(T_j s + 1)}$$

上式中，γ为串联积分环节的个数，称为系统的无差度，它表征了系统的结构特征。γ=0，1，2 时，分别称为0型，Ⅰ型和Ⅱ型系统。

若记 $$G_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n}(T_j s + 1)}$$,则有 $$\lim_{s\to 0} G_0(s) = 1$$

且 $$G_K(s) = \frac{KG_0(s)}{s^{\gamma}}$$

(1)当输入为单位阶跃信号时，系统的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+H(s)G(s)}=\frac{1}{1+K_P}$$

$$K_P=\lim_{s\to 0} G_K(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu}}$$ 为位置无偏系数。

0型系统为有差系统， $$\varepsilon_{ss}=\frac{1}{1+K_P}=\frac{1}{1+K}$$ **,K**越大偏差越小。

一阶以上系统偏差为零，为位置无差系统。

由此可见，有积分环节的系统，系统阶跃响应的稳态值是无差的，无积分环节系统则是有差的。可以用提高放大倍数**K**的方法来减少误差，但过大的**K**会影响系统的稳定性。

(2)当输入为单位斜坡信号时，系统的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sH(s)G(s)}=\frac{1}{K_V}$$

$K_V=\lim\limits_{s\to 0} sG_K(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{K}{s^{\nu}}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s^{\nu-1}}$，$K_V$为速度无偏系数。

0型系统 $K_V=0$, $\varepsilon_{ss}=1/K_V=\infty$

Ⅰ型系统 $K_V=K$, $\varepsilon_{ss}=1/K_V=1/K$

Ⅱ型或Ⅱ型以上系统 $K_V=\infty$, $\varepsilon_{ss}=0$

可见，0型系统不能跟随斜坡输入，因其稳态偏差为∞；Ⅰ型系统可以跟随斜坡输入，但存在稳态偏差，可以通过增大K来减小偏差；Ⅱ型或高于Ⅱ型系统对斜坡输入响应的稳态是无差的。

(3)当输入为加速度信号时，系统的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2H(s)G(s)}=\frac{1}{K_\alpha}$$

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2G_K(s)=\lim_{s\to 0} s^2\frac{K}{s^\nu}=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-2}},$$ K_a为加速度无偏系数。

显然对0、Ⅰ型系统 $K_a=0,$ $\varepsilon_{ss}=1/K_a=\infty$

Ⅱ型系统 $K_a=K,$ $\varepsilon_{ss}=1/K_a=1/K$

Ⅲ型或Ⅲ型以上系统 $K_a=\infty,$ $\varepsilon_{ss}=1/K_a=0$

由上可见，0、Ⅰ型系统不能跟随斜坡输入，因其稳态偏差为∝；
Ⅱ型系统可以跟随斜坡输入，但存在稳态偏差，
可以通过增大K来减小偏差；
Ⅲ型或高于Ⅲ型系统对斜坡输入响应的稳态是无差的。

稳态偏差总述

(1)稳态偏差与输入信号的形式有关；

位置信号、速度信号、加速度信号分别对应于阶跃信号、斜坡信号、抛物线信号，输入该信号引起的稳态偏差分别称之为稳态位置误差系数、稳态速度误差系数、稳态加速度误差系数，或称为位置无偏系数、速度无偏系数、加速度无偏系数，它们表示了稳态的精度。

- 无偏系数越大，精度越高；
- 无偏系数为零时稳态偏差为∞，不能跟随输出；
- 无偏系数为∞时稳态无差。

⑵增加系统的型别时，系统的准确度将提高，但稳定性将变差；

⑶由线性系统叠加原理，当输入上述多种典型信号的组合时，输出量的稳态误差为它们分别作用时产生的稳态误差之和；

⑷对于单位反馈系统，稳态误差等于稳态偏差。

对于非单位反馈系统，可用式

$$E_1(s)=\frac{1}{H(s)}E(s)$$

将稳态偏差换算成稳态误差进行处理。

◆其他输入信号时的误差

如果系统承受除三种典型信号之外的某一信号x(t)输入，此信号x(t)在t=0点附近可以展开成泰勒级数：

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!}x''(0)t^2 + \ldots\ldots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

$$= R_0 + R_1 t + \frac{1}{2}R_2 t^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}R_n t^n$$

如果信号变化较为缓慢，其高阶项为微量，可以忽略：

$$x(t) = R_0 + R_1 t + \frac{1}{2}R_2 t^2$$

根据线性系统的叠加原理，将这些误差叠加起来就可以得到总稳态误差。

小结：

1. 同一系统，在输入信号不同时，系统的稳态误差不同。

2. 位置误差、速度误差、加速度误差分别指输入是阶跃、斜坡、加速度输入时所引起的输出上的误差。

3. 对于单位反馈控制系统，$\varepsilon_{ss} = e_{ss}$

4. 对于非单位反馈控制系统，先求出 e_{ss}， $\varepsilon_{ss} = \dfrac{e_{ss}}{H(0)}$

5. 如为非阶跃、斜坡、加速度输入信号时，

可把输入信号在时间附近展开成泰勒级数，

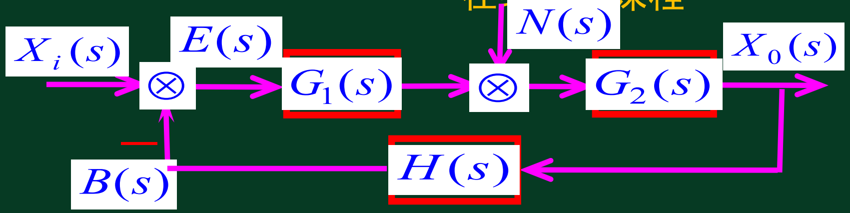
系统的稳态误差可看成是几个典型信号分别作用下的误差之和。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

5、与干扰有关的稳态偏差

输入信号为零时，系统在干扰信号作用下的稳态偏差反映了系统的抗干扰能力。



反馈控制系统的典型结构

$$E(s)=X_i(s)-B(s)=-B(s)=-X_o(s)H(s)$$

$$X_0(s)=\frac{G_2(s)N(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}\Rightarrow E(s)=\frac{-G_2(s)H(s)N(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}$$

得干扰引起的稳态偏差为：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}[sN(s)\frac{-G_2(s)H(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}]$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}[sN(s)\frac{-G_2(s)H(s)}{1+H(s)G_1(s)G_2(s)}]$$

不失一般性，当单位反馈系统以阶跃信号作为干扰得：

①当 $G_1(s)$、$G_2(s)$ 都不含积分环节时，有 $\nu_1=\nu_2=0$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}[s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{-K_2G_{20}(s)}{1+K_1K_2G_{10}(s)G_{20}(s)}]=\frac{-1}{K_1+\frac{1}{K_2}}$$

K_1、K_2 分别为 $G_1(s)$、$G_2(s)$ 的放大系数。可见，K_1、K_2 对系统稳态偏差的作用是相反的，但当 K_1 比较大时，K_2 对系统稳态偏差的作用是不太显著的。$(e_{ss}=-1/K_1)$

②当 $G_1(s)$ 中有一积分环节而 $G_2(s)$ 中无积分环节时，有

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{-K_2G_{20}(s)}{1+K_1K_2G_{10}(s)G_{20}(s)/s}\right]=\frac{-K_2}{\infty}=0$$

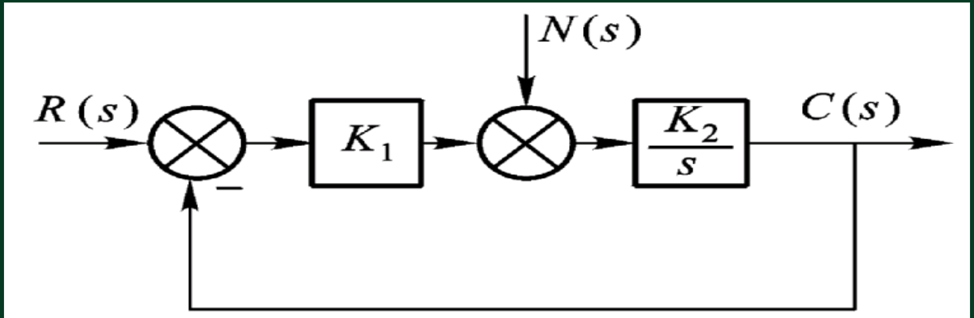
③当 $G_1(s)$ 中无积分环节而 $G_2(s)$ 中有一积分环节时，有

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{-K_2G_{20}(s)/s}{1+K_1K_2G_{10}(s)G_{20}(s)/s}\right]=-\frac{1}{K_1}$$

此时的稳态误差与 K_1 成反比。

综上所述，为提高系统的准确度，增加系统的抗干扰能力，应增大干扰作用点之前的回路放大倍数 K_1 以及增加这一部分回路中积分环节的数目，而不应调节干扰作用点之后的环节参数。

例：系统结构如下图。当输入信号r(t)=1(t),干扰n(t)=1(t)时，求系统的总的稳态误差 e_{ss}



解：① 判别稳定性。由于是一阶系统，所以只要参数 K_1, K_2 大于零，系统就稳定。

② 求E(s)。

$$E(s) = \Phi_{ER}(s)R(s) + \Phi_{EN}(s)N(s)$$

根据结构图可以求出：

$$\Phi_{ER}(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s}{s+K_1K_2}$$

$$\Phi_{EN}(s)=-\Phi_{CN}(s)=\frac{-K_2}{s+K_1K_2}$$

依题意：R(s)=N(s)=1/s,则

$$E(s)=\frac{s}{s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{-K_2}{s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}$$

③ 应用终值定理得稳态误差 e_{ss}

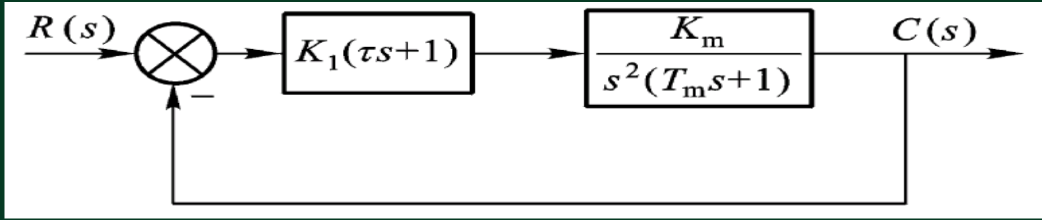
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\left[\frac{s}{s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{-K_2}{s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}\right]$$

$$=-\frac{1}{K_1}$$

例：系统结构如下图：若输入信号为

$$r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$$

试求系统的稳态误差。



解：① 判别稳定性。系统的闭环特征方程为

$$s^2(T_m s+1)+K_1K_m(\tau s+1)=0$$

$$\Rightarrow T_m s^3+s^2+K_1K_m\tau s+K_1K_m=0$$

稳定条件：（1）T_m，K_1，K_m，τ均应大于零；

（2）$\tau > T_m$

②求稳态误差

系统为单位反馈且属**II**型系统

当输入r(t)=1(t)时，$e_{ss1}=0$;

当输入$r(t)=t$时，$e_{ss2}=0$;

当输入$r(t)=\frac{1}{2}t^2$时，$e_{ss3}=\frac{a_0}{K}=\frac{1}{K_1K_m}$

所以系统的稳态误差$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}+e_{ss3}=\frac{1}{K_1K_m}$

小结