石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的时间响应分析

高阶系统

主讲 ： 牛江川

具有零点的二阶系统分析

若二阶系统传递函数中存在一个零点，则零点的影响是使系统的响应迅速且具有较大的超调量。零点与一对共轭极点在复平面上的相对位置决定了零点对阶跃响应的影响。

零点越靠近极点，对阶跃响应的影响越大。如果以α表示零点到虚轴的距离与一对共轭复数极点到虚轴的距离之比，

则在阻尼比取一定数值的情况下，当α大于某一值时，

可以忽略零点对超调量的影响。

3.5、高阶系统

一、典型三阶系统的瞬态响应

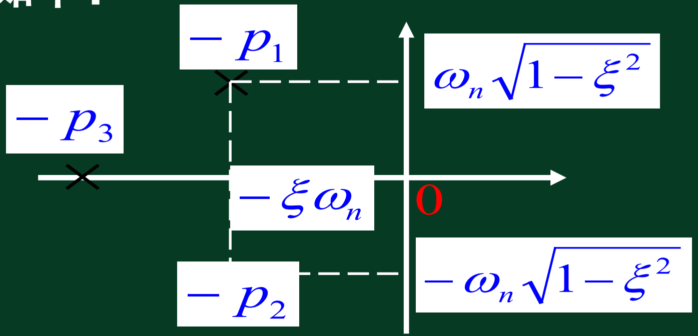
传递函数： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(Ts+1)}$

阻尼比小于1时，极点分布如下：

$$-p_1=-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$-p_2=-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$-p_3=-\frac{1}{T}$$



这相当于在典型二阶系统的基础上增加了一个惯性环节

三阶系统单位阶跃响应

单位阶跃响应为：

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^{\,2}p_3}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2})(s+p_3)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}\Big\{\beta\xi^2(\beta-2)\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t$$
$$+\frac{\beta\xi[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\Big\}-\frac{e^{-p_3 t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$

式中 $\beta=\dfrac{p_3}{\xi\omega_n}$ 表示增加的极点和共轭复极点的相对位置。

$$\beta\xi^2(\beta-2)+1=\xi^2\beta^2-2\beta\xi^2+1+\xi^2-\xi^2$$
$$=\xi^2(\beta-1)^2+(1-\xi^2)>0$$

所以 $e^{-p_3 t}$ 的系数总为负。

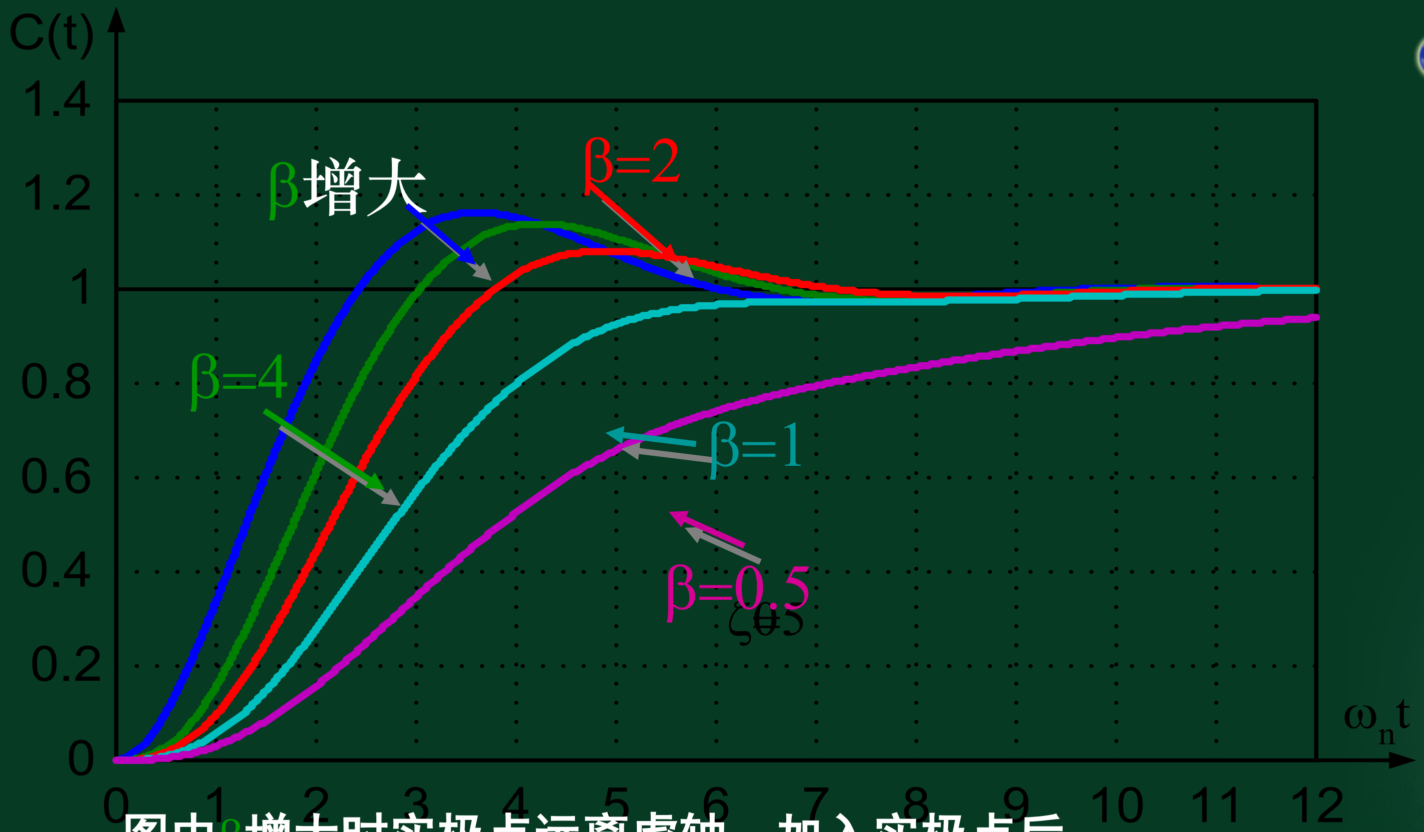
$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}\left\{\beta\xi^2(\beta-2)\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\frac{\beta\xi[\xi^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right\}-\frac{e^{-p_3 t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$

[分析]：三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成：稳态项，共轭复极点形成的振荡分量，实极点构成的衰减指数项分量。

1.当 β>>1时，表示实极点远离虚轴，共轭复极点离虚轴近，系统的瞬态特性主要由共轭复极点决定，呈二阶系统的特性，即系统的特性由二阶系统的特征参数决定。

2.当β<<1时，表示实极点离虚轴近，共轭复极点离虚轴远，系统的瞬态特性主要由实极点决定，呈一阶系统的特性。

3.一般情况下三阶系统的阶跃响应与实极点和共轭复极点的相对位置有关。



图中β增大时实极点远离虚轴。加入实极点后，

阻尼比不变时，超调量下降了，但调节时间增加。

由此可见：

1. 高阶系统的阶跃响应总可以由简单函数项组成，即由一阶、二阶系统的响应组成。

2. 系统输出不仅与闭环极点有关，而且与系数有关(这些系数都与闭环零、极点有关)。

所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于闭环系统的零、极点分布。

1.极点的影响

对于稳定的高阶系统（闭环极点全部位于s左半平面），极点为实数或共轭复数，分别对应时域表达式的指数衰减项或正弦衰减项，但衰减的快慢取决于极点离虚轴的距离。距虚轴近的极点对应的项衰减得慢；距虚轴远的极点对应的项衰减得快，故距虚轴近的极点对瞬态响应影响大。

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$c(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t}$$

2.零点的影响

零点不影响响应的形式。零点只影响各项的系数。零点若靠近某个极点，则该极点对应项的系数就小。

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{9}\frac{s+9}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{80}{81}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{81}\frac{1}{s+10}$$

近似：$$C(s)=\frac{\frac{1}{9}s+1}{s(s+1)(\frac{1}{10}s+1)}\approx\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{1.1}\frac{s+1.1}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{99}\frac{1}{s+1}+\frac{89}{99}\frac{1}{s+10}$$

$$C(s)=\frac{\frac{1}{1.1}s+1}{s(s+1)(\frac{1}{10}s+1)}\approx\frac{1}{s(\frac{1}{10}s+1)}$$

$$=\frac{10}{s(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}$$

3.偶极子

若一对零极点之间的距离是极点到虚轴距离的十分之一以上，这对零极点称为偶极子，其对瞬态响应的影响可以忽略。

总之

- 若极点远离原点，则系数小；
- 极点靠近一个零点，远离其他极点和零点，系数小；
- 极点远离零点，又接近原点或其他极点，系数大。

衰减慢且系数大的项在瞬态过程中起主导作用。

4.主导极点：满足下列条件的极点称为主导极点。

- 闭环系统若存在离虚轴最近的一对共轭极点或一个实极点；
- 极点附近无零点；
- 其他极点距虚轴的距离是离虚轴最近的极点距离的5倍以上。

此时系统的性能主要由主导极点来决定。

5.等效低阶系统

具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。

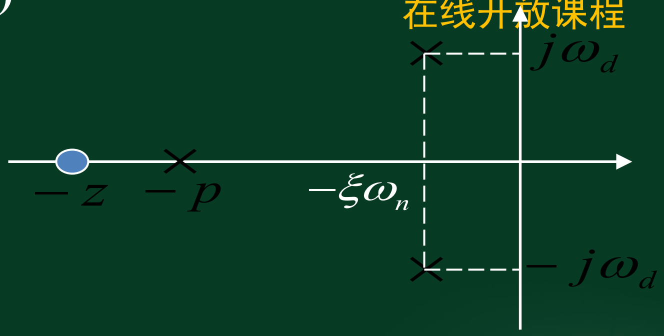
高阶系统近似简化原则：

1.在近似前后，确保输出稳态值不变；
2.在近似前后，瞬态过程基本相差不大。

具体规则是在时间常数形式的开环或闭环传递函数上略去小时间常数。

例如：

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}$$



如果：

$$\frac{z}{\xi\omega_n}>5\text{以及}\ \frac{p}{\xi\omega_n}>5$$

则：

$$\Phi(s)\approx\frac{z\omega_n^{\ 2}}{p(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$$

说明：假设输入为单位阶跃函数，则化简前后的稳态值如下

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}=\frac{z}{p}$$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}z}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2})p}=\frac{z}{p}$$

小结

在线开放课程