石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的时间响应分析

二阶系统

主讲 ： 牛江川

3.4二阶系统

一般控制系统均为高阶系统，在满足一定准确度条件下，可用二阶系统来近似。

二阶系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

式中，ξ为阻尼比，ω_n 为无阻尼固有频率。

二阶系统可用如下方法形成，如图3-6所示。

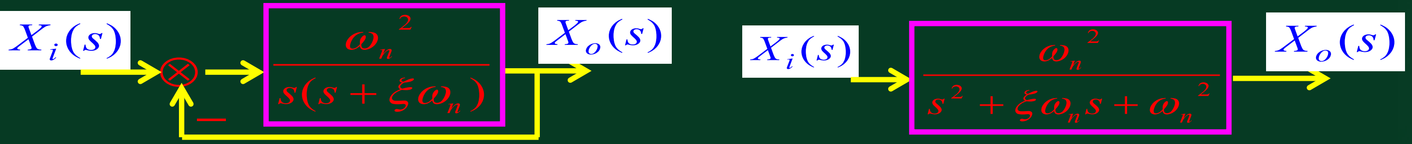


图3-6 常用二阶系统的形成

二阶系统的特征方程： $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

下面讨论系统特征根的情况：

①当0＜ξ＜1时，两特征根为一对共轭复数：

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

极点位于复数平面的左半平面内，系统是稳定的。此时系统为欠阻尼系统；

②当ξ=0时，两特征根为一对共轭虚根： $s_{1,2}=\pm j\omega_n$

此时系统为无阻尼系统，系统不稳定；

③当ξ=1时，两特征根为相等的负实根： $s_{1,2}=-\omega_n$

此时系统为临界阻尼系统，稳定；

④当ξ＞1时，两特征根为不等的负实根：

$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$，系统为过阻尼系统，稳定。

一、二阶系统的单位脉冲响应

输入 $x_i(t)=\delta(t),\ X_i(s)=1$ 。系统输出为：

$$w(t)=L^{-1}[G(s)X_i(s)]=L^{-1}[G(s)X_i(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}]$$

若系统阻尼比满足0≤ξ≤ 1，记 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 为有阻尼固有频率，则二阶系统的时间响应分别如下：

①当0＜ξ＜1，系统为欠阻尼系统时，得：

$$w(t)=L^{-1}[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}]=L^{-1}[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d{}^2}]$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t\geq 0$$

时间响应为减幅正弦振荡函数，且稳态项为零。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

②当ξ=0时，系统为无阻尼系统，得：

$$w(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n{}^2}{s^2+\omega_n{}^2}]=L^{-1}[\omega_n\cdot\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n{}^2}]=\omega_n\sin\omega_n t,\ (t\geq 0)$$

响应为不衰减的等幅振荡，频率为ω_n，习惯上称作系统的<u>无阻尼振荡角频率</u>。

③当ξ=1时，系统为临界阻尼系统，得：

$$w(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}]=\omega_n{}^2te^{-\omega_n t},\ \ (t\geq 0)$$

注：

$$L^{-1}[\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}]=t^n e^{-at}$$

④当ξ>1，系统为过阻尼系统时，得：

$$w(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}]=\omega_n{}^2L^{-1}[\frac{1}{(s+\xi\omega_n)^2-\xi^2\omega_n{}^2+\omega_n{}^2}]$$

$$=\omega_n{}^2L^{-1}[\frac{1}{(s+\xi\omega_n)^2-(\omega_n\sqrt{\xi^2-1})^2}]$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}L^{-1}[\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}-\frac{1}{s+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]$$

$$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\{L^{-1}[\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]-L^{-1}[\frac{1}{s+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]\}$$

$$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}[e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}-e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}],(t\geq 0)$$

显然，二阶过阻尼系统的单位脉冲响应可视为两个一阶系统单位脉冲响应的叠加。

$$W_1(s)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}\cdot\frac{1}{\frac{1}{(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}s+1}$$

$$K_1=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi-\sqrt{\xi^2-1})},\ T_1=\frac{1}{(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}$$

$$w_1(t)=L^{-1}[W_1(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t},(t\geq 0)$$

$$W_2(s)=\frac{-\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\frac{1}{s+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}=\frac{-\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}\cdot\frac{1}{\frac{1}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}s+1}$$

$$K_2=\frac{-\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi+\sqrt{\xi^2-1})},\ T_2=\frac{1}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}$$

$$w_2(t)=L^{-1}[W_2(s)]=L^{-1}[\frac{-\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\frac{1}{s+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]=\frac{-\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t},(t\geq 0)$$

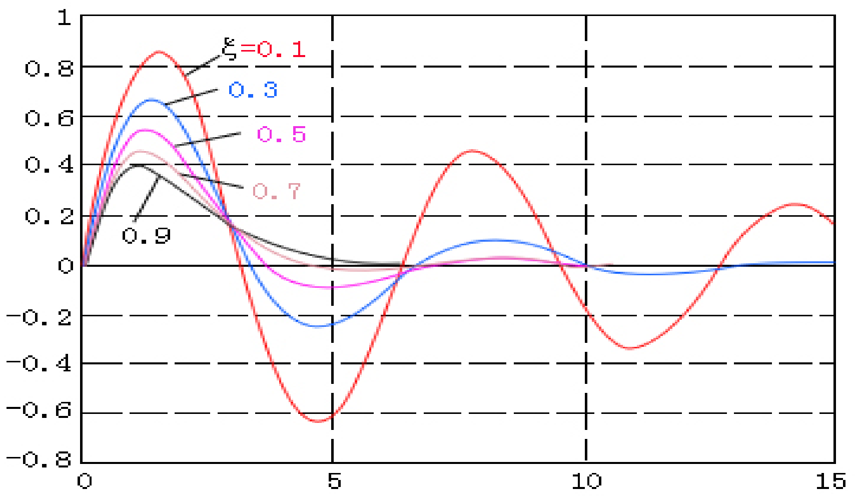


图3-7 二阶系统单位脉冲响应

二阶欠阻尼系统的单位脉冲响应曲线是减幅的正弦振荡曲线，如图所示。由图可知，其阻尼比ξ愈小，衰减愈慢，振荡频率 ω_d 愈大，故二阶欠阻尼系统又称为二阶振荡系统。其幅值衰减的快慢取决于$\xi\omega_n$，其倒数$\frac{1}{\xi\omega_n}$称为衰减系数。

二、二阶系统的单位阶跃响应

系统输入 $x_i(t)=u(t),\ \mathscr{L}\,[u(t)]=\dfrac{1}{s}$

若系统阻尼比满足0≤ξ≤1时，记 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

为<u>有阻尼固有频率</u>，可得：

$$X_0(s)=X_i(s)G(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n+j\omega_d)(s+\xi\omega_n-j\omega_d)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d{}^2}$$

下面讨论其时间响应：

①当0＜ξ＜1，系统为欠阻尼系统时，得：

$$x_0(t)=L^{-1}[X_0(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^{\,2}}]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^{\,2}}-\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^{\,2}}]$$

$$=1-e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t=1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t),(t\geq 0)$$

上式中的三角函数也可以利用三角形法进行合并：

$$a=\sqrt{1-\xi^2},b=\xi,c=1,\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi},\alpha=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi},\sin\alpha=\sqrt{1-\xi^2},\cos\alpha=\xi$$

$$x_0(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}[\xi\sin\omega_d t+\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d t]$$

$$=1-e^{-\xi\omega_n t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}[\sin\omega_d t\cos\alpha+\cos\omega_d t\sin\alpha]$$

$$=1-e^{-\xi\omega_n t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}),(t\geq 0)$$

显然，上式中第二项为瞬态项，它是减幅正弦振荡函数；第一项是稳态项。

②当ξ=0，系统为无阻尼系统时：

$$X_0(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n{}^2},\quad x_0(t)=1-e^{-0t}\cos\omega_n t=1-\cos\omega_n t \quad (t\ge 0)$$

③当ξ=1，系统为临界阻尼系统时，得：

$$X_0(s)=X_i(s)G(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\omega_n\frac{1}{(s+\omega_n)^2}$$

$$x_0(t)=1-e^{-\omega_n t}-\omega_n te^{-\omega_n t}=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t},(t\ge 0)$$

时间响应变化速度 $x_0{}'(t)=\omega_n{}^2te^{-\omega_n t}$，在开始和最终时刻，时间响应的变化速度为零，当 $t\ge 0$ 时， $x_0{}'(t)$ >0，说明过渡过程是单调上升的。

④当 $\xi > 1$，系统为过阻尼系统时，得：

$$X_0(s) = X_i(s)G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2 - (\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})^2}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{s + 2\xi\omega_n}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot [\frac{1}{s + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n} - \frac{1}{s + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot [\frac{s + 2\xi\omega_n}{s + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot [\frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}{s + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n} - \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}{s + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot [\frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}{s + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n} - \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}{s + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n}]$$

$$x_0(t) = L^{-1}[X_0(s)]$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, (t \geq 0)$$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

$$x_0(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}-\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t},(t\geq 0)$$

上式中第一项中指数项的衰减速度比第二项中指数项要快，第二项成为起主导作用的因素。
这是因为在s平面上，愈靠近虚轴的根，过渡过程的时间愈长，对过渡过程的影响愈大。

系统的时域响应中，时间常数$T=1/\omega_n$增大几倍，系统瞬态响应曲线就在横坐标方向“展宽”同样的倍数；反之亦然。

总结阻尼比对曲线的影响

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

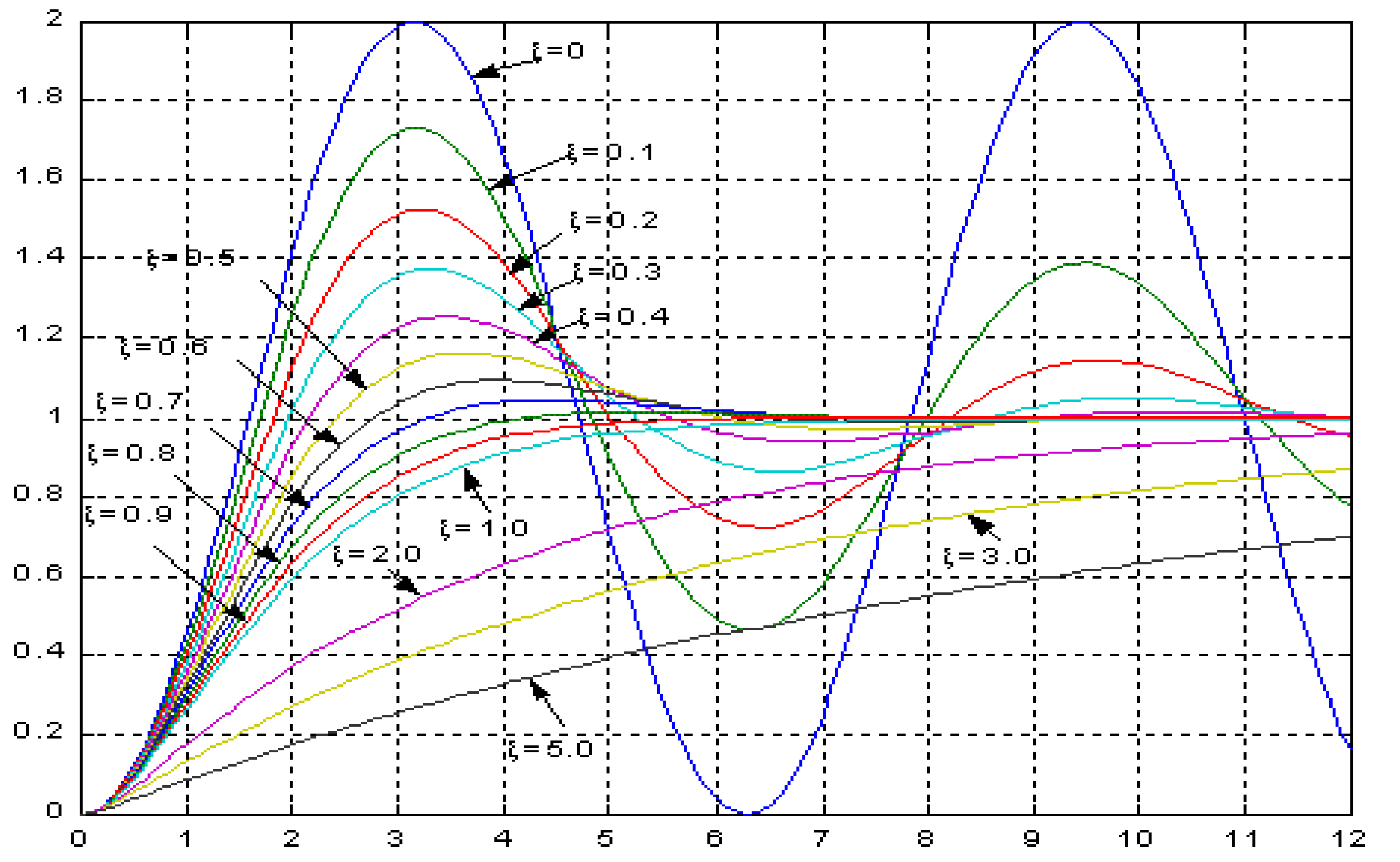


图3-8 二阶系统单位阶跃响应

现将二阶系统单位阶跃响应特点总结如下：

$\xi<0$时，阶跃响应发散，系统不稳定；

$\xi=0$时，响应为等幅振荡，系统不稳定；

$0<\xi<1$时，有振荡，系统趋于稳定，越小振荡愈激烈，响应愈快；

$\xi>1$时，无振荡且无超调量，但过渡时间较长，系统稳定。

在根据给定的性能指标设计系统时，常选择二阶系统而不选择一阶系统，因为二阶系统容易获得较短的过渡时间，同时也能满足对振荡性能的要求。在对二阶系统阻尼的选择上，一般选择欠阻尼系统，并希望系统工作在$\xi=0.4 \sim 0.8$的欠阻尼状态，因为这样的工作过程其振荡特性适度且过渡时间又较短。

另外，从前面的分析得知，影响二阶系统过渡过程的因素在于系统的瞬态响应，所以选择合适的过渡过程，实际上是在选择合适的瞬态响应，即选择系统合适的两个特征参数的值。

三、系统响应的性能指标

在许多情况下，系统性能指标一般以时域量值的方式，根据系统对单位阶跃输入的响应给出。

因为它不但与实际输入相似，代表了最不利的输入情况，而且产生阶跃输入比较容易，从系统对单位阶跃输入的响应也较容易求得对任何输入的响应。

因完全无振荡的单调过程的过渡时间太长，所以除了一些不允许产生振荡的系统，通常都采用欠阻尼的系统。下面是针对欠阻尼二阶系统性能指标的说明。

在线开放课程

阶跃响应的性能指标

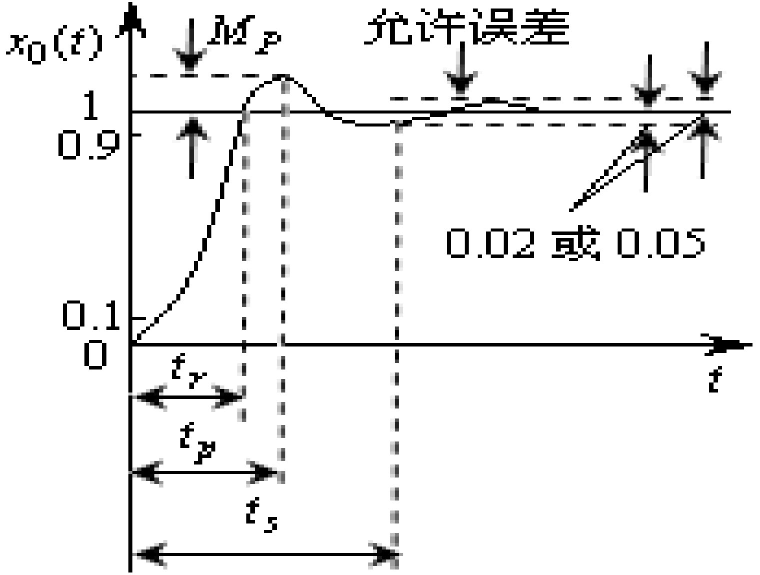


图3.2.3二阶系统的单位阶跃响应

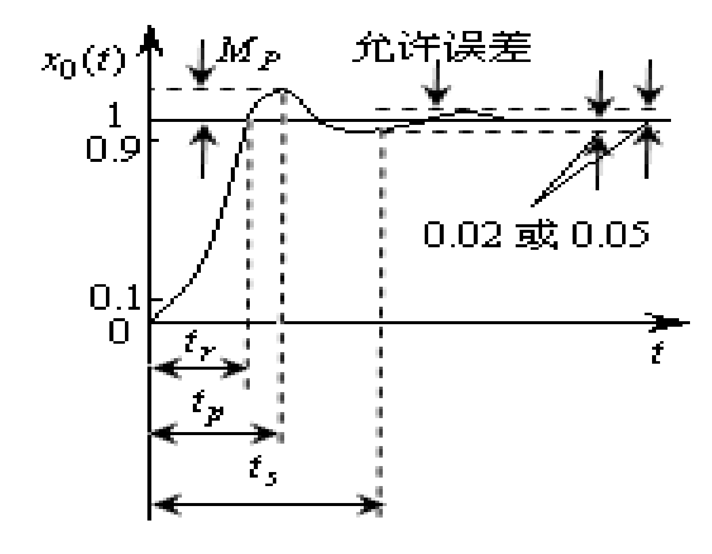
二阶系统的性能指标主要有：

上升时间 t_r ；峰值时间t_p；

最大超调量M_p;

调整时间 t_s ；振荡次数N；

延迟时间 t_d；稳态误差e_{ss}

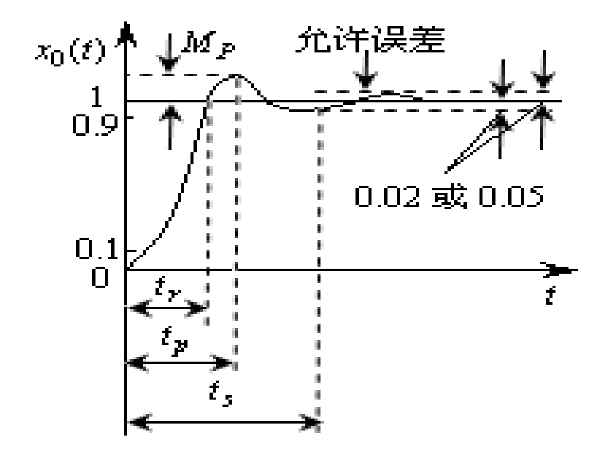


①上升时间 t_r

响应曲线从原工作点出发，第一次达到稳态输出值所需的时间定义为上升时间（对于无超调的过阻尼系统，一般将响应曲线从稳态值的10%上升到90%所需的时间称为上升时间）。

由定义，二阶欠阻尼系统的单位阶跃响应：

$$x_0(t)=1-e^{\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right),(t\geq 0)$$



当 $t=t_r$ 时， $x_0(t_r)=x_0(\infty)=1$，有：

$$1=1-e^{\xi\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r\right)$$

$e^{\xi\omega_n t_r}\neq 0$，得 $\cos\omega_d t_r+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r=0$

令 $\beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$，有 $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t_r+\beta)=0$

$$\omega_d t_r=k\pi-\beta=\pi-\beta,2\pi-\beta,3\pi-\beta,\cdots$$

，第一次达输出稳态值时

$\omega_d t_r=\pi-\beta,$ $\boxed{t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\quad(\text{与}\xi、t_r、\omega_n\text{有关。})}$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

②峰值时间 t_p

响应曲线达到第一个峰值所需时间定义为峰值时间。

$$x_0(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t),(t\geq 0)$$

显然在 t_p 点，时间响应的导数为零，由 $\left.\frac{dx_0(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$

得： $\sin\omega_d t_p=0,\quad \omega_d t_p=0,\pi,2\pi,\cdots$

由定义知 $\omega_d t_p=\pi$ 得：

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}},$$ 与ω_n、ξ有关。

由此可见，峰值时间是有阻尼振荡周期的一半。

③最大超调量 M_p

定义：响应曲线最大值与稳态值之差的百分比。

$$M_p=\frac{x_0(t_p)-x_0(\infty)}{x_0(\infty)}\times 100\%$$

因最大超调量发生在峰值时间，$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}$，$x_0(\infty)=1$

$$M_p=-e^{-\xi\omega_n\frac{\pi}{\omega_d}}\left(\cos\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}\right)$$

$$\times 100\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%$$

特点：超调量只与阻尼比有关。

当 $\xi=0.4-0.8$时，相应的 $M_p=25\%-1.5\%$

④调整时间 t_s

在过渡过程中，系统输出的取值满足下面的不等式所需的时间，定义为调整时间。

$$\left|x_0(t) - x_0(\infty)\right| \le \Delta \cdot x_0(\infty), (t \ge t_s)$$

式中，△为指定的微小量，一般取 $\Delta = 0.02 - 0.05$

因 $x_0(\infty) = 1$，知 $x_0(t) \le 1 \pm \Delta$

将 $x_0(t)$ 关系式代入，可求得当0<ξ<0.7时，若取

$\Delta = 0.02, 0.05$，可得调整时间近似值分别为：

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \qquad t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$$

研究得知，当 $\Delta=0.02,\ \xi=0.76$ 时， t_s为最小；

当 $\Delta=0.05,\ \xi=0.68$ 时， t_s为最小；

在设计二阶系统时，一般取ξ=0. 707为最佳阻尼比，此时不但调整时间小，超调量也不大，另外，在系统截止频率的定义中，一般规定由零频幅值（频率接近于零时，闭环系统输出的幅值与输入的幅值之比）

下降到0. 707倍该值时的频率称为系统的截止频率。

在具体设计时，通常由超调量确定ξ，后据ω_n来确定t_s。

可以看出，二阶系统的特征参数ξ、ω_n决定了系统的调整时间和最大超调量；反过来，也可根据对调整时间t_s、最大超调量的要求确定二阶系统的特征参数ξ和ω_n

⑤振荡次数N

在过渡过程时间内，$x_0(t)$ 穿越其稳态值 $x_0(\infty)$ 次数的一半定义为振荡次数（t_s内，系统响应曲线的振荡次数）：

$$N = \frac{t_s}{2\pi/\omega_d}$$

当0<ξ<0.7

$$\begin{cases} \Delta = 0.02 \text{ 时，} & t_s \approx \dfrac{4}{\xi\omega_n}\text{，得：} \quad N = \dfrac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} \\ \Delta = 0.05 \text{ 时，} & t_s \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n}\text{，得：} \quad N = \dfrac{1.5\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} \end{cases}$$

同超调量一样，振荡次数也只与阻尼比有关。

⑥延迟时间：

单位阶跃响应曲线上升到其稳态值的一半所需的时间。

⑦稳态误差：

时间趋于无穷时，系统单位阶跃响应的实际值

与期望值之差。

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

二阶系统的瞬态性能指标与其特性参数之间的关系

从二阶系统的瞬态性能指标与其特性参数之间的关系可以看出：

l：系统性能指标的矛盾性。一般而言，系统的上升时间、峰值时间、调整时间等反映系统响应快速性的性能指标与最大超调量、振荡次数等指标是相互矛盾的。

通常情况下，选择处于欠阻尼状态的二阶系统，但对于一些不允许出现超调（如液体控制系统，超调会导致液体溢出）或大惯性（如加热装置）的控制系统，则使系统处于过阻尼状态。

Ⅱ：为使二阶系统具有满意的动态特性，必须合理选择系统的阻尼比和无阻尼固有频率。

一般的做法是先根据最大超调量、振荡次数等指标来选择系统的阻尼比，然后再根据上升时间、峰值时间、调整时间等指标来确定系统无阻尼固有频率。

注：以上结论是从典型二阶系统的阶跃响应中推导出来的，

若是具有零点的二阶系统，这些公式是不能直接应用的，

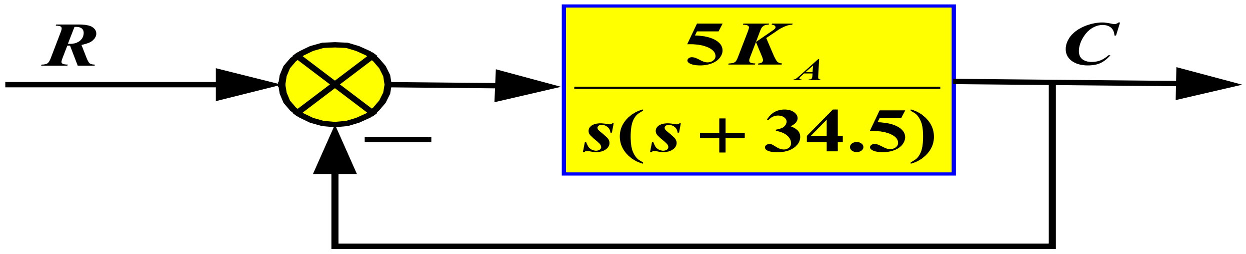
但其性能指标与二阶系统特征参数之间的变化趋势却保持不变。

如闭环零点影响瞬态分量的初始幅值和相位，不影响ξ和ω_n。

四、二阶系统计算举例

- 设位置随动系统，其结构图如图所示，当给定输入为单位阶跃时，试计算放大器增益K_A＝200，1500，13.5时，输出位置响应特性的性能指标：

峰值时间t_p，调节时间t_s和超调量$\sigma\%$，并分析比较之。



例题解析(1)

- 输入：单位阶跃

$$r(t) = 1 \cdot (t) \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

- 系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{5K_A}{s^2 + 34.5s + 5K_A}$$

例题解析(2)

当K_A =200时

- 系统的闭环传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{1000}{s^2+34.5s+1000}$
- 与标准的二阶系统传递函数对照得：

$$\omega_n=\sqrt{1000}=31.6\,rad\cdot s^{-1}$$

$$\varsigma=\frac{34.5}{2\omega_n}=0.545$$

峰值时间：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}=0.12$秒

超调量：$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=13\%$

调节时间：$t_s=\dfrac{3.0}{\varsigma\omega_n}=0.17$秒

例题解析(3)

当K_A ＝1500时

- 系统的闭环传递函数：$$\Phi(s)=\frac{5\times1500}{s^2+34.5s+7500}$$

- 与标准的二阶系统传递函数对照得：

$$\omega_n=\sqrt{7500}=86.6 \quad rad\cdot s^{-1} \qquad \varsigma=\frac{34.5}{2\omega_n}=0.2$$

峰值时间：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}=\dfrac{\pi}{84.85}=0.037$秒

超调量：$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=52.7\%$

调节时间：$t_s=\dfrac{3.0}{\varsigma\omega_n}=0.17$秒

例题解析(4)

当K_A =13.5时

- 系统的闭环传递函数：$$\Phi(s)=\frac{67.5}{s^2+34.5s+67.5}$$
- 与标准的二阶系统传递函数对照得：

$$\omega_n=\sqrt{67.5}=8.21 \quad rad\cdot s^{-1}$$

$$\xi=\frac{34.5}{2\omega_n}=2.1$$

峰值时间： $t_p=?$ 无

超调量： $\sigma\%=0$

调节时间：$t_s=\frac{1}{\omega_n}(6.45\varsigma-1.7)=1.44$秒

第六版P97

例1（P92），前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)}$ 的单位负反馈系统，ξ=0.6，$\omega_n=5s^{-1}$。当以单位阶跃信号作为输入时，求其性能指标 t_p、M_p、t_s。

解：系统闭环传函为典型二阶环节传函，则对欠阻尼系统，其峰值时间为：

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.785s,$$

$$M_p=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%=9.5\%$$

$\Delta=0.02$ 时，$t_s\approx\dfrac{4}{\xi\omega_n}=1.33s$

$\Delta=0.05$ 时，$t_s\approx\dfrac{3}{\xi\omega_n}=1s$

P97例2自学

P99例3：已知前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{50}{s(0.05s+1)}$ 的单位负反馈系统，当系统输入单位阶跃函数时，$M_p \le 5\%$，求：

(1)校核该系统的各参数是否满足要求；

(2)在原系统中增加一微分负反馈环节 $H(s)=1+\tau s$，求微分反馈的时间常数τ。

解：(1)求出标准形式的闭环传函，得二阶系统的两个特征参数ξ和 ω_n 然后由ξ值得 M_p，知其不满足要求。

(2)先求出系统的闭环传函，由 $M_p \le 5\%$ 得出ξ值，从而得出τ值。

小结