



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的时间响应分析

时间响应及其组成

主讲：牛江川

□3.1 时间响应及其组成

在建立系统的数学模型之后，下一步即可通过数学模型来分析系统的特性。常用分析系统特性的方法有时域分析法、根轨迹法、频域分析法等。**时间响应分析**是其中重要的方法之一，它是一种直接的方法，用于研究系统的稳定性和系统在典型输入信号作用下的输出特性。

系统的时间响应：描述系统微分方程的解与其组成，它们反映了系统本身的固有特性与系统在输入作用下的动态历程。

1、系统时间响应分类

◆系统的零输入响应、零状态响应以及自由响应、强迫响应（以无阻尼单自由度系统为例。）

例3-1：如图3-1，质量为 m ，弹簧刚度为 k 的单自由度系统在外力 $F\cos\omega t$ 作用下，得到系统的动力学方程如下：

$$my''(t) + ky(t) = F \cos \omega t \quad \text{--- (3-1)}$$

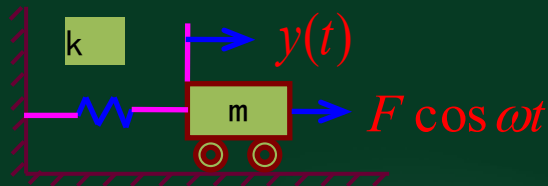


图3.1.1 单自由度 m - k 系统

$$my''(t) + ky(t) = F \cos \omega t \quad \text{--- (3-1)}$$

上述二阶非齐次微分方程完全解由两部分组成：

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{--- (3-2)}$$

式中， $y_1(t)$ 是对应的齐次方程的通解； $y_2(t)$ 是方程的一个特解。由微分方程的求解过程知，其解可写成如下的形式：

$$y_1(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad \text{--- (3-3)}$$

$$y_2(t) = Y \cos \omega t \quad \text{--- (3-4)}$$

式中， $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为系统的无阻尼固有频率。

将 (3-4) 代入 (3-1) 得:

$(-m\omega^2 + k)Y \cos \omega t = F \cos \omega t$, 化简得:

$$Y = \frac{F}{k(1 - \omega^2 \frac{m}{k})} = \frac{F}{k[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]} = \frac{F}{k(1 - \lambda^2)}$$

式中, $\lambda = \omega/\omega_n$, 得非齐次微分方程的完全解为:

$$y(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{F}{k(1 - \lambda^2)} \cos \omega t \quad \text{---(3-6)}$$

为求上式中的A和B, 将其对t求导, 得:

$$y'(t) = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t - \frac{F\omega}{k(1 - \lambda^2)} \sin \omega t \quad \text{---(3-7)}$$

$$y(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{F}{k(1-\lambda^2)} \cos \omega t \quad \text{---(3-6)}$$

$$y'(t) = A \omega_n \cos \omega_n t - B \omega_n \sin \omega_n t - \frac{F \omega}{k(1-\lambda^2)} \sin \omega t \quad \text{---(3-7)}$$

初始条件下，即当 $t=0$ 时，有 $y(t) = y(0)$, $y'(t) = y'(0)$

代入上面两式得：

$$A = \frac{y'(0)}{\omega_n}, B = y(0) - \frac{F}{k(1-\lambda^2)}, \text{ 代入 (3-6), 整理得:}$$

$$y(t) = \frac{y'(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + y(0) \cos \omega_n t - \frac{F}{k(1-\lambda^2)} \cos \omega_n t + \frac{F}{k(1-\lambda^2)} \cos \omega t$$

自由响应

强迫响应  石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

$$y(t) = \underbrace{\frac{y'(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + y(0) \cos \omega_n t}_{\text{零输入响应}} - \underbrace{\frac{F}{k(1-\lambda^2)} \cos \omega_n t + \frac{F}{k(1-\lambda^2)} \cos \omega t}_{\text{零状态响应}}$$

零输入响应

零状态响应

①按**振动来源**：第一、二项是当系统在无输入时，由系统的初态引起的响应，称为**零输入响应**（初始条件不为零时零输入响应存在）。第三、四项是系统在其初始状态为零时，仅由作用力引起的响应，称为**零状态响应**。

②按**振动性质**：第一、二项是由其初始状态引起的自由振动，第三项是由外力引起的自由振动，且自由振动的频率为 ω_n ，此三项组成系统的**自由响应**；

第四项是由外界作用力所引起的**强迫响应**，其振动频率与作用力所施加的频率相同。

一般情况下，系统的动力学方程为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

该方程的解即系统的时间响应，也由通解和特解组成。

其中，如同前面分析的系统一样，

通解为系统的自由响应，特解为其强迫响应。

其中通解也由两部分组成，

一部分为由系统初态所引起的自由响应，

一部分为由输入所引起的自由响应。

若由系统初态所确定的零输入响应为零，
则系统的输出为零状态响应。

本书所讲的时间响应均指零状态响应。

对同一定常线性系统，若输入函数等于
某一函数的导函数，则该输入函数的响应
也等于这一函数相应函数的导函数。

若输入函数含有多阶导数项，
由线性系统的叠加原理进行处理。

◆ 系统的瞬态响应与稳态响应 (Transient Response & Steady_state Response)

对于某一控制系统，首先要求它必须是**稳定的**。

若系统传递函数所对应的特征根实部都小于零，
则随着时间的增加，当 $t \rightarrow \infty$ 时，系统的自由响应项收敛。

此时，系统是稳定的，其自由响应称为**瞬态响应**。

反之，只要有一个特征根的实部大于零，
则系统的自由响应会随着时间的推移趋于无穷大，
系统不稳定，其自由响应就不是瞬态响应。

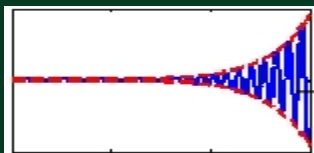
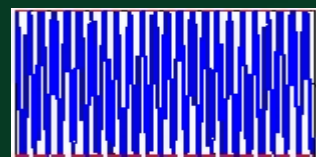
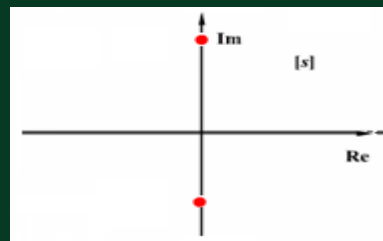
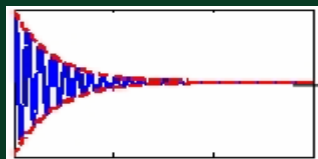
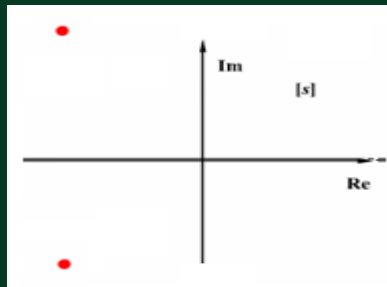
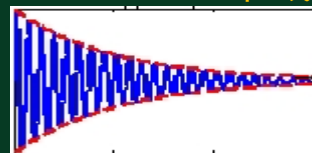
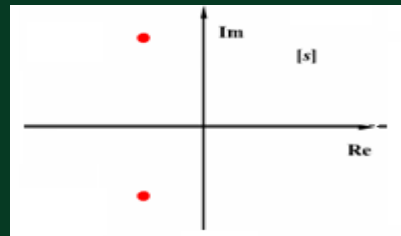
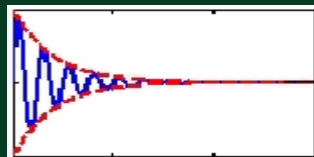
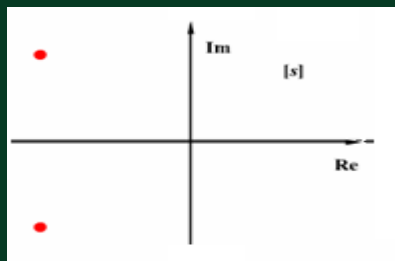
简言之，**瞬态响应**即时间趋于无穷时，时域分析中时间响应趋近于零的部分。若系统有一个特征根的实部为零，而其余特征根的实部均为负数，则其自由响应项最终会变成一等幅振荡，这种系统称为**临界稳定系统**，临界稳定系统也是不稳定系统。

所谓**稳态响应**，是指时域分析中时间达到无穷时，当瞬态响应消失后仍然保留的那一部分固定的响应。稳态响应一般是指系统的强迫响应。

对于稳定系统，特征根实部绝对值大小决定了它所对应的自由响应项衰减的快慢。实部的绝对值越大，对应的自由响应项衰减得越快，反之亦然；特征根虚部的分布情况与系统自由响应项的振荡情况有关，它影响着系统响应的准确性。

系统的特征根影响系统自由响应的收敛性和振荡

在线开放课程



◆ 绝对稳定性、相对稳定性和稳态误差

(Absolute Stability, Relative Stability, Steady_state Error) 在线开放课程

控制系统动态特性中，最重要的是**稳定性**。

如果控制系统没有受到任何扰动或输入信号的作用，

系统的输出量保持在某一状态上，

控制系统便**处于平衡状态**。

如果控制系统受到扰动量的作用后，

输出量最终又返回到它的平衡状态，

说明这种系统是稳定的；

而当输出量显现为持续的振荡过程或者

输出量无限制的偏离其平衡状态，那么系统是不稳定的。

实际物理系统输出量只能增加到一定的范围，
否则或者使系统遭到破坏，也可能当输出量超过
一定数值后，系统变成非线性。

相对稳定性：因为物理控制系统包含有一些贮能元件，
所以当输入量作用于系统时，系统的输出量不能
立即跟随输入量的变化，而是在系统达到稳态之前，
表现为瞬态响应过程。对于实际控制系统，在达到
稳态以前，它的瞬态响应，常常表现为阻尼振荡过程
——称动态过程（对应动态性能指标）。

稳态误差：如果在稳态时，系统的输出量与输入量不能完全吻合，就认为系统有稳态误差（对应稳态性能指标）。这个误差表示系统的准确度，是系统控制精度或抗扰动能力的一种度量。

在分析控制系统时，既要研究系统的**瞬态响应**，如达到新的稳定状态所需的时间，同时也要研究系统的**稳态特性**，以确定对输入信号跟踪的误差大小。

小结



在线开放课程

