石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的数学模型

系统的传递函数（三）

主讲 ： 吉喆

目录

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

④积分环节

环节的输出正比于输入的积分： $x_0(t) = \dfrac{1}{T}\int_0^t x_i(t)dt$

传递函数：$G(s) = \dfrac{X_0(s)}{X_i(s)} = \dfrac{1}{Ts} = \dfrac{K}{s}$　　T为积分环节的时间常数。

当输入为单位阶跃信号时，$x_i(t) = u(t)$　$X_i(s) = \dfrac{1}{s}$

则 $X_0(s) = X_i(s)G(s) = \dfrac{1}{Ts} * \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{Ts^2}$，经拉氏反变换得：

$$x_0(t) = \frac{1}{T}t$$

积分环节特点：

输出量是输入量对时间的累积。

输入阶跃信号时，输出在t=T时才能等于输入，故环节对输入信号有滞后作用。

经过一段时间的累积后，输入变为零时，积分停止，输出量不再增加，但保持该值不变，故积分环节具有记忆功能。系统中有储能或积累特点的元件，都具有积分环节的特性。

例 图示为有源积分网络，输入电压为

$u_i(t)$，输出电压为 $u_0(t)$，R为电阻，C为电容。

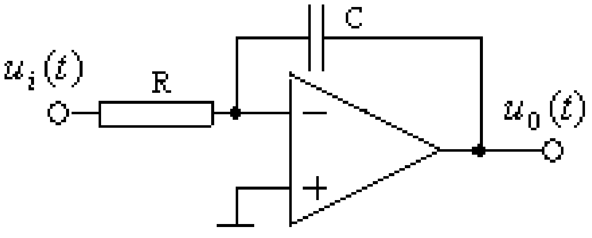

图2.2.11 有源积分网络

由图可得：

$$\frac{u_i(t)}{R} = -C\frac{du_0(t)}{dt}$$

故其传递函数为：

$$G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{k}{s},$$

式中， $k = -1/RC$

⑤振荡环节

振荡环节是二阶环节，若系统微分方程为：

$$T^2\frac{d^2x_0(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dx_0(t)}{dt}+x_0(t)=Kx_i(t)$$

则有其拉氏变换的一般型： $G(s)=\dfrac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$

K为放大系数。K=1 $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$

令 $T=\dfrac{1}{\omega_n}$， 传递函数变为：$G(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

式中，T为振荡环节的时间常数，ξ为阻尼比，

ω_n 为无阻尼固有频率。

对二阶环节作阶跃输入时，输出有两种情况：

①当$0 \leq \xi < 1$时，输出为一衰减振荡过程，此时二阶环节即为振荡环节；

②当$\xi \geq 1$时，输出为一指数上升曲线而不振荡，最后达到常值输出。此时，该二阶环节不是振荡环节，而是两个一阶惯性环节的组合。这说明振荡环节是二阶环节，但二阶环节不一定是振荡环节。

例：如图所示为L-R-C电路。由克希荷夫定律，有：

$$u_i(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + u_0(t)$$

$$u_0(t) = Ri_R(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt$$

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

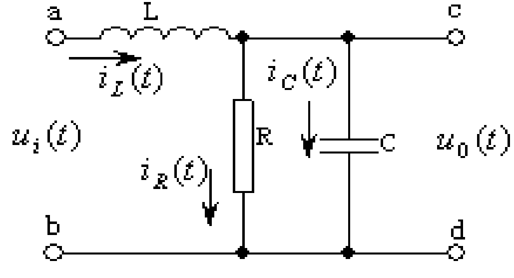

图 2.2.13 L-R-C 电 路

微分方程为：$LCu_0''(t) + \frac{L}{R}u_0'(t) + u_0(t) = u_i(t)$

传递函数为：$G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$

令 $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{RC}}, \xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{R}}$

则传递函数变为：$G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2}$

⑥延迟环节

延迟环节特点是输出量经过一段延迟时间后完全复现输入信号，即：

$x_0(t) = x_i(t-\tau)$，式中，τ 为延迟时间。

延时环节也是线性环节，符合叠加原理。根据拉氏变换的延时定理，可得延时环节的传递函数：

$$G(s) = \frac{L[x_0(t)]}{L[x_i(t)]} = \frac{L[x_i(t-\tau)]}{L[x_i(t)]} = \frac{X_i(s)e^{-\tau s}}{X_i(s)} = e^{-\tau s}$$

（注：延时环节与惯性环节的区别）液压、气动系统中，由于管长而延缓了信号传递的时间，因而出现了延时环节。

典型环节的传递函数

①比例环节（放大环节）

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow X_0(s)$$

②一阶惯性环节

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{Ts+1}} \longrightarrow X_0(s)$$

K为放大系数，T为时间常数

③微分环节

输出量与输入量的导数成比例关系

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{Ts} \longrightarrow X_0(s)$$

④积分环节

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ts}} \longrightarrow X_0(s)$$

⑤振荡环节

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}} \longrightarrow X_0(s)$$

⑥延迟环节

$$X_i(s) \longrightarrow \boxed{e^{-\tau s}} \longrightarrow X_0(s)$$

小结

- 积分，振荡和延时环节传递函数的表达式与特点