石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的数学模型

系统的传递函数（一）

主讲 ： 吉喆

目录

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

- 1. 拉普拉斯变换
- 2. 传递函数定义
- 3. 传递函数的零极点增益模型
- 4. 典型环节的传递函数（一）
- 5. 典型环节的传递函数（二）

目录

1. 拉普拉斯变换

拉氏变换是控制工程中的一个基本数学方法，其优点是能将时间函数的导数经拉氏变换后，变成复变量s的乘积，将时间表示的微分方程，变成以s表示的代数方程。

定义：

设有时间函数 $f(t)$，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；在 $t\geqslant0$时定义函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

象函数　拉氏变换符号　原函数　复变量

拉普拉斯变换（Laplace）：在一定条件下，把实数域中的实变函数 $f(t)$ 变换到复数域内与之等价的复变函数 $F(s)$ 。

典型常见函数拉氏变换表

拉氏变换	时间函数	拉氏变换	时间函数
1	$\delta(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$

拉氏变换的主要运算定理

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

线性定理 $L[af_1(t)+bf_2(t)]=aL[f_1(t)]+bL[f_2(t)]$

微分定理 $L\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0),\quad f(0)=f(t)\big|_{t=0}$

积分定理 $L[\int f(t)dt]=\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{f^{(-1)}(0)}{s},\quad f^{(-1)}(0)=\int f(t)dt\big|_{t=0}$

位移定理 $L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$

延时定理 $L[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s)$

卷积定理 $L[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$

初值定理 $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

终值定理 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=f(\infty)=\lim\limits_{s\to0}sF(s)$

2.传递函数（ Transfer Function ）的提出

微分方程的局限性：

- 分析和设计高阶系统比较困难。
- 难以得到系统的结构、参数所决定的系统阶数和系数对其解的影响；在系统的输出响应不符合要求时，无法依此来调节系统的结构和参数。
- 每改变一次结构和参数，就得重新编写和求解微分方程。
- 微分方程求解过程复杂，特别是高阶微分方程。

传递函数的优势：

- 可以表征系统的动态特性。
- 可以用来研究系统的结构或参数变化对其性能的影响，简化分析和设计工作。
- 可以分析高阶或者更为复杂的系统。
- 在经典控制理论中广泛使用的频率法和根轨迹法，都是建立在传递函数这种数学模型基础上。

利用拉氏变换求解微分方程优点：

- ✓ 将对复杂微分方程的求解，转化成对简单代数方程的求解；
- ✓ 求得的解是完整的，初始条件包含在拉氏变换中，不必另行确定积分常数；
- ✓ 如果所有的初始条件均为零，则微分方程的拉氏变换可以简单地通过用以下代换而得到：

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \qquad \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow s^2$$

3. 传递函数定义

线性定常系统的微分方程一般式为

$$a_n x_0^{(n)}(t) + a_{n-1} x_0^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x_0'(t) + a_0 x_0(t)$$
$$= b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} x_i^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 x_i'(t) + b_0 x_i(t)$$

在零初始条件下，对方程两边进行laplace变换

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) X_0(s)$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) Xi(s)$$

定义：

在零初始条件下，线性定常系统输出的Laplace变换与输入的Laplace变换之比，成为该系统的传递函数G(s)。

$$G(s) = \frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \quad (n \geq m)$$

传递函数：复数域中描述系统特性的数学模型

在线开放课程

传递函数

$$G(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{\boxed{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}}{\boxed{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}}\quad(n\geq m)$$

与外界联系

系统固有特性

或

$$X_0(s)=G(s)X_i(s)$$

$$\xrightarrow{X_i(s)}\boxed{G(s)}\xrightarrow{X_0(s)}$$

传递函数方框图

传递函数的特点：

1. 传递函数是关于复变量s的复变函数；
2. 传递函数的分母反映系统本身与外界无关的固有特性，传递函数的分子反映系统与外界的联系；
3. 当输入确定时，系统的输出完全取决于系统的传递函数

$$x_0(t)=L^{-1}[X_0(s)]=L^{-1}[G(s)X_i(s)]$$

4. 传递函数的零极点增益模型

传递函数

$$G(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}(n\geq m)$$

因式分解

传递函数的零极点增益模型

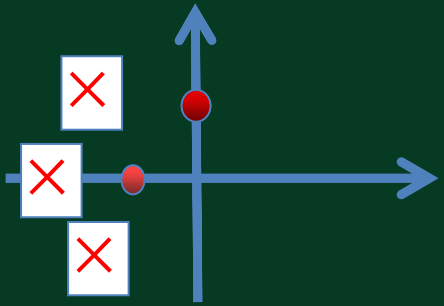
$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

零点：$z_1,z_2\ldots z_m$

极点：$p_1,p_2\ldots p_n$

放大系数（增益）：

$$G(0)=\frac{K(-z_1)(-z_2)\ldots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)}=\frac{b_0}{a_0}$$



系统传递函数的零、极点分布图

传递函数的零、极对系统性能的影响

传递函数的零、极点分布影响系统的动态性能。

- 零点影响系统的瞬态响应曲线的形状，即影响系统的瞬态性能。
- 极点决定系统瞬态响应的收敛性，即影响系统的稳定性。
- 系统的放大系数决定了系统的稳态输出值。
- 对系统的研究可以转化为对系统传递函数零点、极点和放大系数的研究。

小结

- Laplace变换的基本公式与定理
- 传递函数概念与特点
- 传递函数零点、极点与放大系数的理解