石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的数学模型

系统的微分方程（三）

主讲 ： 吉喆

目录

在线开放课程

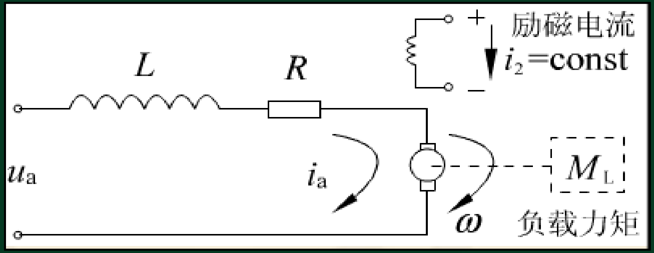
- 1. 系统的数学模型
- 2. 数学模型的建立基础
- 3. 数学模型的建立方法
- 4. 线性系统和非线性系统
- 5. 微分方程的列写
- 6. 微分方程的增量化表示
- 7. 非线性微分方程的线性化

1. 微分方程的增量化表示

在线开放课程

电枢控制式直流电动机的微分方程

$$\boxed{T_aT_m\frac{d^2\omega}{dt^2}}+\boxed{T_m\frac{d\omega}{dt}}+\omega=C_du_a-\boxed{C_mT_a\frac{dM_L}{dt}}-C_mM_L$$



若电动机处于平衡状态，则

$$\omega=C_du_a-C_mM_L$$

（静态模型）

平衡状态下，$u_a=u_{a0},M_L=M_{L0},\omega=\omega_0$

平衡点 $\boxed{(u_{a0},M_{L0},\omega_0)}$

$$\omega_0=C_du_{a0}-C_mM_{L0}$$

偏离平衡点时

$$u_a=u_{a0}+\Delta u_a,M_L=M_{L0}+\Delta M_L,\omega=\omega_0+\Delta\omega$$

$$T_aT_m\frac{d^2(\omega_0+\Delta\omega)}{dt^2}+T_m\frac{d(\omega_0+\Delta\omega)}{dt}+(\omega_0+\Delta\omega)$$
$$=C_d(u_{a0}+\Delta u_a)-C_mT_a\frac{d(M_{L0}+\Delta M_L)}{dt}-C_m(M_{L0}+\Delta M_L)$$

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

$$T_a T_m \frac{d^2(\omega_0+\Delta\omega)}{dt^2} + T_m \frac{d(\omega_0+\Delta\omega)}{dt} + (\omega_0+\Delta\omega)$$
$$= C_d(u_{a0}+\Delta u_a) - C_m T_a \frac{d(M_{L0}+\Delta M_L)}{dt} - C_m(M_{L0}+\Delta M_L)$$

$$\omega_0 = C_d u_{a0} - C_m M_{L0}$$

$$T_a T_m \frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = C_d \Delta u_a - C_m T_a \frac{d\Delta M_L}{dt} - C_m \Delta M_L$$ （增量方程）

$$T_a T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = C_d u_a - C_m T_a \frac{dM_L}{dt} - C_m M_L$$ （绝对量方程）

讨论：

1. 增量方程的变量是某一工作点处的变化量；
2. 增量化方程的形式与实际坐标方程形式相同；
3. 当平衡点为坐标原点时，二者等价；否则，二者不等价。
4. 自动控制理论中的微分方程一般都是用增量方程来表示，且习惯上将增量符号省去。

2、非线性微分方程的线性化

线性化的条件

1.非线性函数时连续函数（即不是本质非线性）。

2.系统在预定工作点附近做小偏差的运动。

线性化的方法：

1.确定预定工作点

2.在工作点附近将非线性方程展开成Taylor 级数形式。

3.忽略高阶项。

4.表示成增量化方程的形式。

例2-1 液体伺服系统

1.明确系统的输入与输出

输入x，输出y

2.列写原始微分方程

控制阀

油缸

$$p = p_1 - p_2 \quad (1)$$

$$my'' + cy' = Ap \quad (2)$$

$$q = Ay' \quad (3)$$

$$q = q(x, p) \quad (4)$$

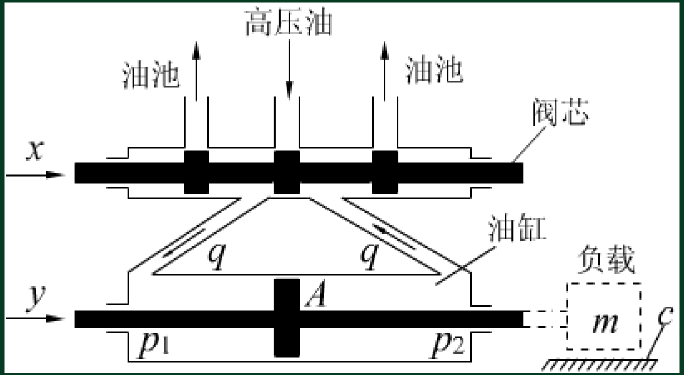


图2-1液压伺服系统

3.非线性函数线性化

(1)确定工作预定点　(x0,p0)

(2)二元泰勒级数展开

(3)增量方程

在线开放课程

(2)二元泰勒级数展开

$$q(x,p)=q(x_0,p_0)+\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0,p_0}(x-x_0)+\frac{\partial q}{\partial p}\Big|_{x_0,p_0}(p-p_0)$$

$$\boxed{+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\Big|_{x_0,p_0}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial p}\Big|_{x_0,p_0}(x-x_0)(p-p_0)+\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\Big|_{x_0,p_0}(p-p_0)^2+\cdots}$$

$$\approx q(x_0,p_0)+\boxed{\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0,p_0}}\Delta x+\boxed{\frac{\partial q}{\partial p}\Big|_{x_0,p_0}}\Delta p$$

(3)增量方程

$$q(x,p)-q(x_0,p_0)=\boxed{K_q}\Delta x-\boxed{K_c}\Delta p$$

$$\Delta q=K_q\Delta x-K_c\Delta p$$

(4)代入原方程整理

$$my''+(c+A^2/K_c)y'=(AK_q/K_c)x$$

讨论：

线性化特点：

1.非线性项线性化后微分方程是增量形式的微分方程。

2.线性化的结果与系统的预定工作点有关。

如：本例中，不同预定点的k_q,k_c不同

3.非线性项线性化必须满足连续性和小偏差条件。

小结

- 微分方程的增量化含义与表示形式
- 非线性方程线性化的方法