



石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的数学模型

系统的微分方程（二）

主讲：吉喆

目录

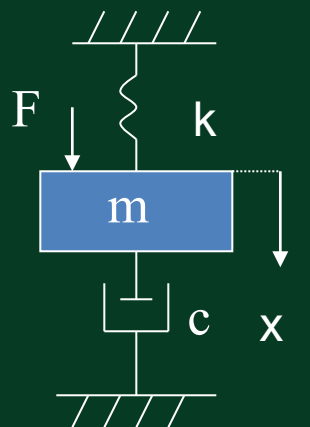


在线开放课程

- 1. 系统的数学模型
- 2. 数学模型的建立基础
- 3. 数学模型的建立方法
- 4. 线性系统和非线性系统
- 5. 微分方程的列写
- 6. 微分方程的增量化表示
- 7. 非线性微分方程的线性化

1. 微分方程列写举例

例2-1求质量-弹簧-阻尼的机械位移系统的微分方程。



(a) 机械系统

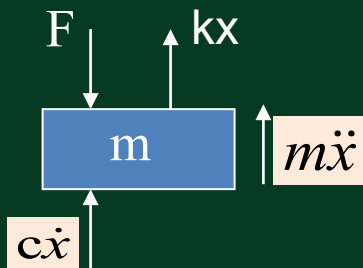


图2-1 (b)质量块受力分析

1.明确系统的输入与输出

输入为 $F(t)$ ，输出为 $x(t)$

2.列写原始微分方程

$$F - c\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

3.整理

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

例2-2 列写如图所示的电网络的微分方程

1. 明确系统的输入与输出

输入为 $u(t)$, 输出为电容器的电量 q

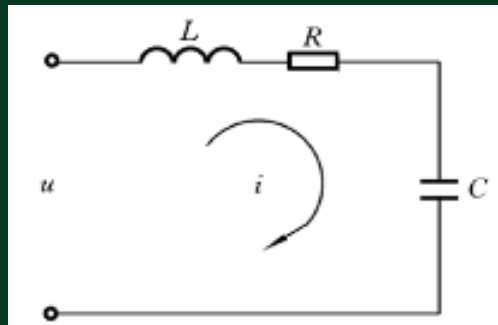
2. 列写原始微分方程

$$u = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

3. 消除中间变量，并整理

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = u$$



RLC网络

图2-2 RLC网络

例2-3 列写如图所示的电网络的微分方程

1.明确系统的输入与输出

输入为 $u_1(t)$,输出为 $u_2(t)$

2.列写原始微分方程

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt &= u_1 \quad (A) \\ i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (B) \\ \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= u_2 \end{aligned}$$

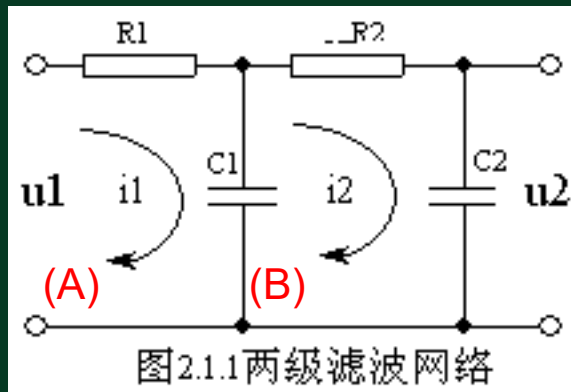


图2-3 两级RLC网络

3.消除中间变量，并整理

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

例2-4 列写直流电动机的微分方程

1. 明确系统的输入与输出

输入为 u_a 和 M_L , 输出为 ω

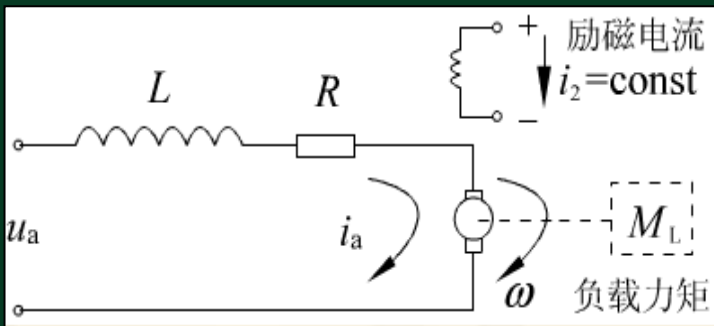
2. 列写原始微分方程

$$L \frac{di_a}{dt} + i_a R + e_d = u_a$$

$$e_d = k_d \omega$$

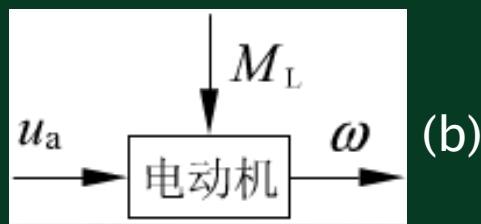
$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_L$$

$$M = k_m i_a$$



在线开放课程

(a)



(b)

图2-4 电枢控制式直流电动机

3.消除中间变量，并整理

$$\frac{LJ}{k_d k_m} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{RJ}{k_d k_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_d} u_a - \frac{L}{k_d k_m} \frac{dM_L}{dt} - \frac{R}{k_d k_m} M_L$$

$$\text{令 } L/M = T_a, RJ/(k_d k_m) = T_m, 1/k_d = C_d, T_m/J = C_m$$

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = C_d u_a - C_m T_a \frac{dM_L}{dt} - C_m M_L$$

☀ 电枢控制式直流电动机的数学模型。转速 ω 既由 u_a 控制，又受 M_L 的影响。

控制系统一般由若干元件组成，列写微分方程的一般步骤是：



在线开放课程

Step1:根据元件的工作原理和在系统中的作用，确定元件的输入量和输出量（必要时还要考虑扰动量），并根据需要引进一些中间变量——划分环节，确定变量；

Step2:按照信号的传递顺序，从系统的输入端出发，根据各元件在工作过程中所遵循的物理或化学定律，按工作条件忽略一些次要因素，并考虑相邻元件的彼此影响，列出系统各个环节的动态微分方程；（注意：负载效应，非线性方程线性化）

Step3:消去上述各方程中的中间变量，最后得到只包含描述输出量与输入量（包括扰动量）关系的微分方程；

Step4:将微分方程标准化。与输入有关的项写在方程的右边，与输出有关的项写在方程的左边，方程的各阶导数按降幂排列。

小结

- 微分方程的列写步骤



在线开放课程

