



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

系统的数学模型

系统的微分方程（一）

主讲：吉喆

目录



在线开放课程

- 1. 系统的数学模型
- 2. 数学模型的建立基础
- 3. 数学模型的建立方法
- 4. 线性系统和非线性系统
- 5. 微分方程的列写
- 6. 微分方程的增量化表示
- 7. 非线性微分方程的线性化

目录



在线开放课程

- 1. 系统的数学模型
- 2. 数学模型的建立基础
- 3. 数学模型的建立方法
- 4. 线性系统和非线性系统
- 5. 微分方程的列写
- 6. 微分方程的增量化表示
- 7. 非线性微分方程的线性化

1. 系统的数学模型

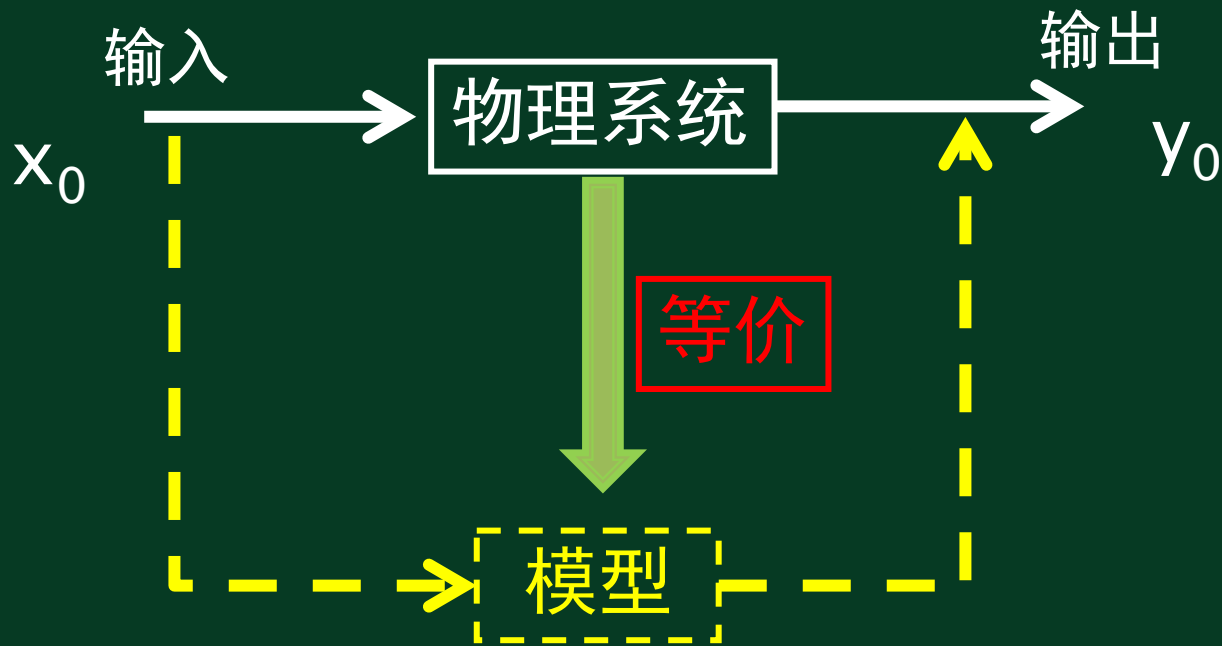


图2-1 模型示意图

数学模型：用数学表达式描述系统特性，揭示变量间的关系。

数学模型形式

时间域:

微分方程 (连续系统)

差分方程 (离散系统)

状态方程

拉氏(逆)变换



z变换

复数域:

传递函数 (连续系统)

脉冲传递函数 (离散系统)

频率域:

频率特性

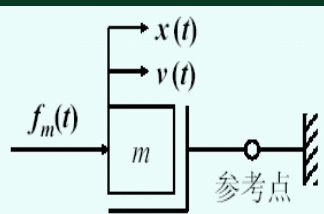
特点:

- ★ 对于给定的动态系统, 数学模型多种形式, 不是唯一的。
- ★ 对于线性系统, 它们之间是等价的, 可相互转换。
- ★ 针对具体问题, 选择不同的数学模型。

2. 数学模型的建立基础-典型元件遵循的物理定律

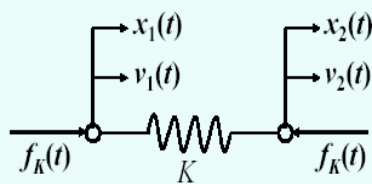
机械系统：牛顿定律、能量守恒定律。

质量 M



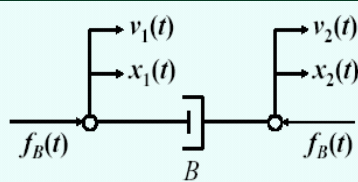
$$f_m(t) = m \frac{d}{dt} v(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

弹簧 K



$$\begin{aligned} f_K(t) &= K[x_1(t) - x_2(t)] = Kx(t) \\ &= K \int_{-\infty}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt \\ &= K \int_{-\infty}^t v(t) dt \end{aligned}$$

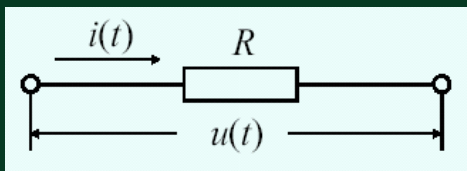
阻尼 B



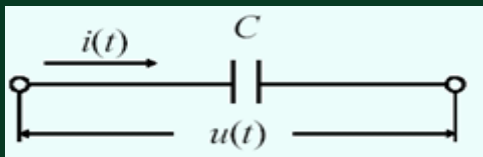
$$\begin{aligned} f_B(t) &= B[v_1(t) - v_2(t)] = Bv(t) \\ &= B \left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) \\ &= B \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned}$$

电系统：欧姆定理、基尔霍夫定律。

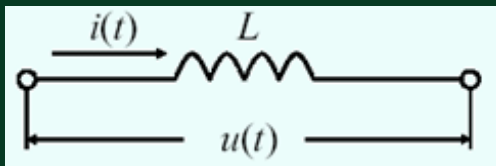
◆ 电阻：
$$u(t) = Ri(t)$$



◆ 电容：
$$u(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt$$



◆ 电感：
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



3. 数学模型的建立方法

- 分析法/解析法

根据系统及元件的特点和连接关系，按照它们所遵循的物理、化学等定律，列写出各物理量之间的数学关系式。

根据系统或元件所遵循的有关定律来建立数学模型的方法。

- 实验法

通过对系统施加典型的测试信号，如阶跃信号、脉冲或正弦信号等，记录系统的时间响应曲线或频率响应曲线，从而估算出系统的传递函数。

根据实验数据进行整理，并拟合出比较接近实际的数学模型。

4、线性系统和非线性系统

叠加原理:

多个输入信号同时作用于系统时，系统的输出等于各个输入信号单独作用时系统的输出之和。

$$\begin{cases} \text{可加性: } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \\ \text{齐次性: } f(ax) = af(x) \end{cases}$$

线性系统: 系统的运动状态可以用线性微分方程来表示，满足叠加原理。

非线性系统: 系统中存在一个或多个非线性元件，系统只能用非线性微分方程来描述。

系统是否线性这一特征，不随系统模型形式的不同而改变。线性与非线性是系统的固有特性，完全由系统的结构和参数确定。

线性系统又分为**线性定常系统**和**线性时变系统**。

线性定常系统：系统微分方程的系数均为常数。其特点是系统响应曲线的形态只取决于具体的输入，与输入信号的时间起点无关。

线性时变系统：微分方程的系数为时间的函数。

线性定常系统： $\ddot{x}_o(t) + 3\dot{x}_o(t) + 7x_o(t) = 4\dot{x}_i(t) + 5x_i(t)$

线性时变系统： $\ddot{x}_o(t) + 3\dot{x}_o(t) + 7x_o(t) = 4t^2\dot{x}_i(t) + 5x_i(t)$

非线性系统： $\ddot{x}_o(t) + 3x_o\dot{x}_o(t) + 7x_o(t) = 4t^2\dot{x}_i(t) + 5x_i(t)$

小结



在线开放课程

- 系统的数学模型的含义
- 建立数学模型的物理基础
- 数学模型的建立方法
- 线性与非线性系统的特征

