石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

几何量测基础

随机误差的处理

主讲 ：聂国权

1、随机误差的处理

- 测量列(series measurement)：**在相同测量条件下，**连续、多次、重复测量同一被测量时，得到的一系列测量数据。
- 测量列中随机误差的处理
  - 测量列中每一测得值具有随机性；
  - 但就整体而言符合一定的分布规律；
  - 可用概率论和数理统计的方法估计和预测。

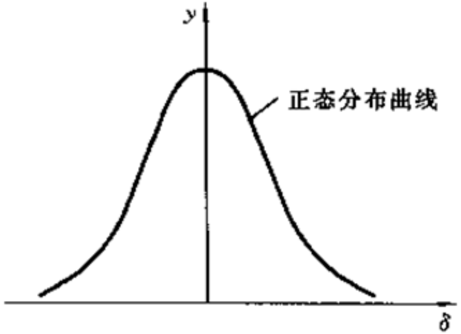
1、随机误差的处理

➢圆柱销轴径同一部位测量数据统计表

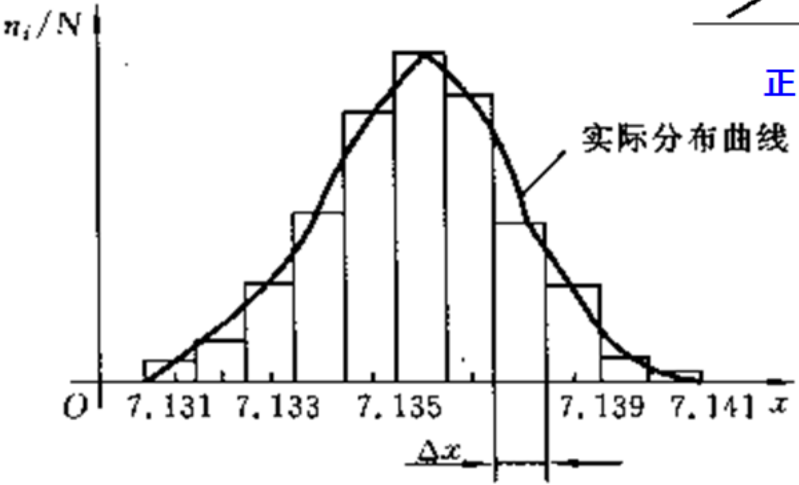
(N=150)测量结果：7.1305 mm~7.1415 mm，分成11组，间隔0.001 mm。

测量值范围	测量中值	出现次数 n_i	出现率 n_i/N	测量值范围	测量中值	出现次数 n_i	出现率 n_i/N
7.130 5~7.131 5	x_1=7.131	n_1=1	0.007	7.136 5~7.137 5	x_7=7.137	n_7=29	0.193
7.131 5~7.132 5	x_2=7.132	n_2=3	0.020	7.137 5~7.138 5	x_8=7.138	n_8=17	0.113
7.132 5~7.133 5	x_3=7.133	n_3=8	0.054	7.138 5~7.139 5	x_9=7.139	n_9=9	0.060
7.133 5~7.134 5	x_4=7.134	n_4=18	0.120	7.139 5~7.140 5	x_{10}=7.140	n_{10}=2	0.013
7.134 5~7.135 5	x_5=7.135	n_5=28	0.187	7.140 5~7.141 5	x_{11}=7.141	n_{11}=1	0.007
7.135 5~7.136 5	x_6=7.136	n_6=34	0.227				

1、随机误差的处理



正态分布(高斯)曲线



频率直方图和实际分布曲线

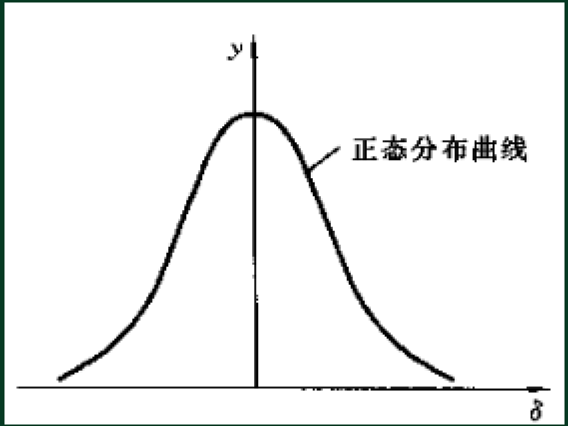
1、随机误差的处理

- 正态分布(normal distribution)的特性（相同测量条件）
  - 对称性（相消性）：绝对值相等的正、负随机误差出现的概率相等。
  - 单峰性（集中性）：绝对值越小的随机误差出现的概率越大，反之则越小。

1、随机误差的处理

- **有界性（有限性）：** 随机误差的绝对值不超过一定界限（绝对值很大的随机误差出现的概率接近零）。
- **抵偿性：** 随着测量次数增加，随机误差的算术平均值趋于零。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}\delta_i}{N}=0$$



1、随机误差的处理

- **正态分布曲线的数学表达式**
  - y-概率分布密度；
  - σ-标准偏差；
  - δ-随机误差；

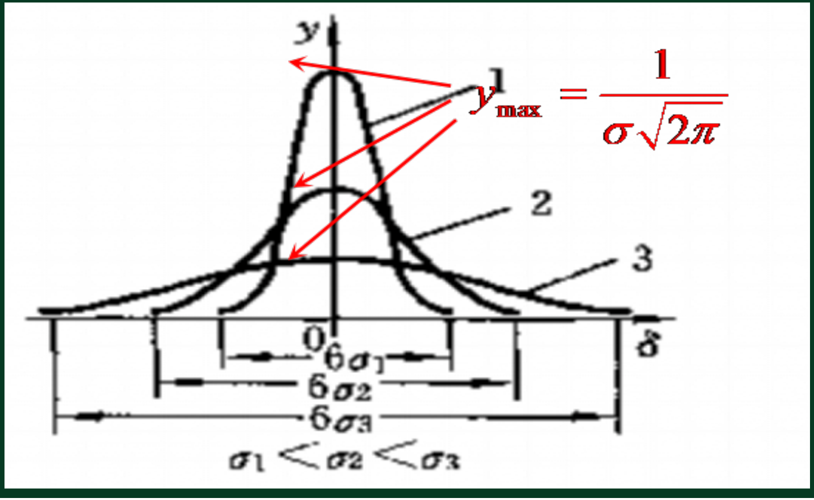
$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)}$$

1、随机误差的处理

➢ 随机误差的评定指标

➢ 标准偏差(standard deviation) σ：反映测量列中测得值的分散程度；衡量单次测量的精密度。

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 / N}$$



标准偏差对随机误差分布特性的影响

1、随机误差的处理

- 随机误差的极限值δ_{lim}
  - 随机误差不会超过某一范围（有界性），随机误差的极限值就是测量极限误差（测量误差超出它的概率可以忽略的界限）。

1、随机误差的处理

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} y\mathrm{d}\delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)}\mathrm{d}\delta=1 \qquad P=\int_{-\delta}^{+\delta} y\mathrm{d}\delta<1$$

$$P=\int_{-\delta}^{+\delta} y\mathrm{d}\delta=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+t\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=2\Phi(t) \qquad t=\frac{\delta}{\sigma}$$

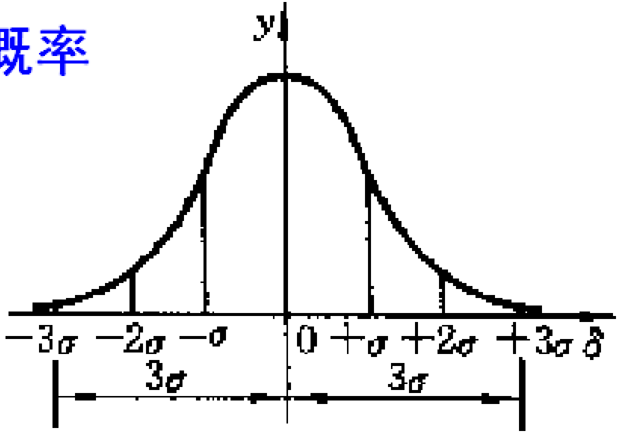
$\Phi(t)$-概率积分（拉普拉斯函数）； t-置信因子（置信系数）

P-置信概率： 随机误差落在$(-t\sigma, +t\sigma)$范围内的概率。

1、随机误差的处理

t	$\delta=\pm t\sigma$	$\Phi(t)$	不超出$\|\delta\|$的概率$P=2\Phi(t)$	超出$\|\delta\|$的概率$\alpha=1-2\Phi(t)$
1	1σ	0.3413	0.6826	0.3174
2	2σ	0.4772	0.9544	0.0456
3	3σ	0.49863	0.9973	0.0027
4	4σ	0.499868	0.99936	0.00064

4个特殊置信因子t对应的概率



1、随机误差的处理

- 由于超出$\delta=\pm 3\sigma$的概率很小(0.27%)，将$\pm 3\sigma$认为单次测量随机误差的极限值$\delta_{\lim}$

$$\delta_{\lim} = \pm 3\sigma = \pm 3\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2 / N}$$

- 单次测量结果表示为

$x = x_i \pm \delta_{\lim} = x_i \pm 3\sigma$；置信概率99.73%

1、随机误差的处理

标准偏差的估算

- 计算标准偏差σ必须具备3个条件
- 不存在系统误差
- 测量次数无限大$N \to \infty$
- 被测真值必须已知$\delta_i = x_i - x_0$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_N^2}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 / N}$$

1、随机误差的处理

- 用算术平均值代替真值

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N \approx x_0$$

- 用残余误差代替随机误差

  - 残余误差：测量列中任意测得值与该测量列的算术平均值的差值。

$$v_i = x_i - \bar{x} \approx \delta_i$$

1、随机误差的处理

- 残余误差的两个基本特性（测量次数足够多时）
  - 残余误差的代数和等于零 $\sum_{i=1}^{N} \nu_i \approx 0$
  - 残余误差的平方和为最小 $\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2 = \min$
- 用**Bessel**公式估算单次测量值的标准偏差***S***

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2} \approx \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 / N}$$

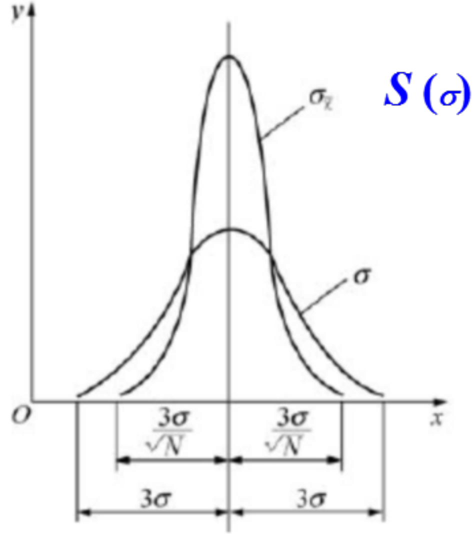
1、随机误差的处理

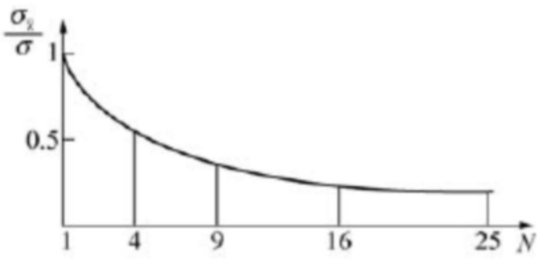
➤算术平均值的标准偏差（误差理论）

➤测量列算术平均值的标准偏差与测量列单次测量值的标准偏差的关系

$$\sigma_{\bar{x}} = S / \sqrt{N}$$

$S\,(\sigma)$ 与$\sigma_{\bar{x}}$的关系





1、随机误差的处理

- **测量列算术平均值的测量极限误差**

$$\delta_{\lim(\bar{x})} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 3\left(S/\sqrt{N}\right) = \pm 3\left[\left(\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}\right)/\sqrt{N}\right]$$

$$= \pm 3\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\right)/\sqrt{N}\right\} = \pm 3\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i-\left(\sum_{i=1}^{N}x_i/N\right)\right]^2}\right)/\sqrt{N}\right\}$$

- **多次测量所得结果的表达式，置信概率为99.73%**

$$x_e = \bar{x} \pm \delta_{\lim(\bar{x})} = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$$