石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

电路方程的矩阵形式

关联矩阵、回路矩阵

主讲 ：蔡承才

本节将介绍关联矩阵和回路矩阵的相关知识，主要包括：

电路的矩阵描述；

关联矩阵；

回路矩阵。

1. 图的矩阵表示

图的矩阵表示是指用矩阵描述图的拓扑性质，即KCL和KVL的矩阵形式。有三种矩阵形式：

结点 ⟷ 支路	关联矩阵
回路 ⟷ 支路	回路矩阵
割集 ⟷ 支路	割集矩阵

2. 关联矩阵A

用矩阵形式描述结点和支路的关联性质。n个结点b条支路的图用n×b的矩阵描述：

$$A_a = \begin{array}{cc} & \text{支路}\,b \rightarrow \\ \text{结点}\downarrow n & \begin{bmatrix} \quad n \times b \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

注意

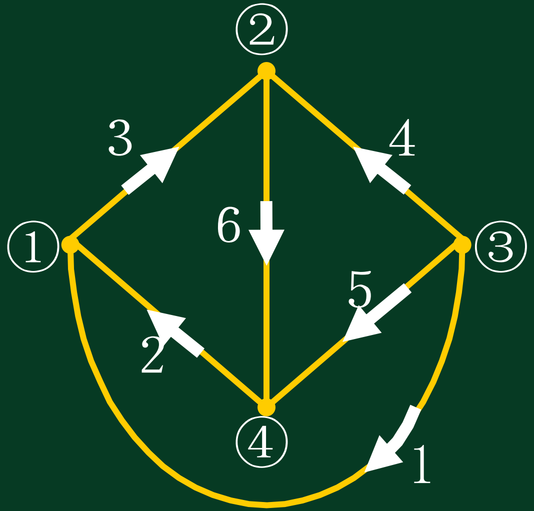
每一行对应一个结点，每一列对应一条支路。

矩阵A_a的每一个元素定义为：

$$a_{jk} \begin{cases} a_{jk}=1 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联，方向背离结点；} \\ a_{jk}=-1 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联，方向指向结点；} \\ a_{jk}=0 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 无关。} \end{cases}$$

例

$$A_a = \begin{array}{c} \text{结} \backslash \text{支} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$



特点

① 每一列只有两个非零元素，一个是+1，一个是-1，A_a的每一列元素之和为零。

② 矩阵中任一行可以从其他n-1行中导出，即只有n-1行是独立的。

$$
A_a=\begin{array}{c|c}
\text{结}\backslash\text{支} & \begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
\cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
A_a=\begin{array}{c|c}
 & \text{支路}b \rightarrow\\
\text{结点}\ n\text{-}1 \downarrow & \left[(n\text{-}1)\times b\right]
\end{array}
$$

降阶关联矩阵*A*

特点 *A*的某些列只具有一个+1或一个 - 1，这样的列对应与划去结点相关联的一条支路。被划去的行对应的结点可以当作参考结点。

注意 给定*A*可以画出对应的有向图。

关联矩阵A的作用

① 用关联矩阵A表示矩阵形式的KCL方程；

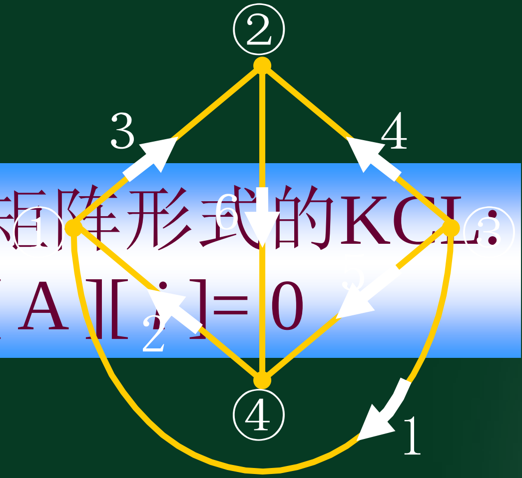
设：$[i]=\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{bmatrix}^{T}$

以结点④为参考结点

$$[A][\,i\,]=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -i_1-i_2+i_3 \\ -i_3-i_4+i_6 \\ i_1+i_4+i_5 \end{bmatrix}=0$$

n-1**个独立方程**



矩阵形式的KCL：

$[\,A\,][\,i\,]=0$

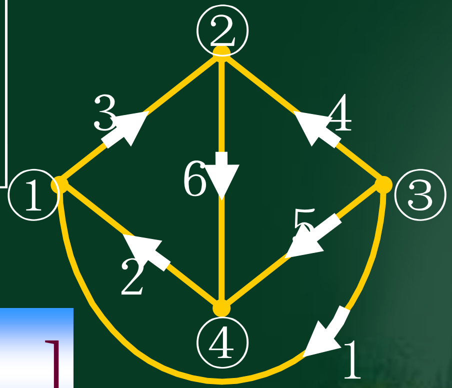
石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

② 用矩阵$[A]^T$表示矩阵形式的KVL方程。

设：$[u]=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6\end{bmatrix}^T$ $[u_n]=\begin{bmatrix}u_{n1}\\ u_{n2}\\ u_{n3}\end{bmatrix}$

$$[A]^T[u_n]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{n1}\\ u_{n2}\\ u_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_{n1}+u_{n3}\\ -u_{n1}\\ u_{n1}-u_{n2}\\ -u_{n2}+u_{n3}\\ u_{n3}\\ u_{n2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\end{bmatrix}$$



矩阵形式的KVL $[u]=[A]^T[u_n]$

3. 回路矩阵B

独立回路与支路的关联性质可以用回路矩阵B描述。

$$[B]= \begin{array}{c|c} & \text{支路}\, b \rightarrow \\ \hline \text{独立回路}\, l \downarrow & \begin{bmatrix} \quad l \times b \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

注意

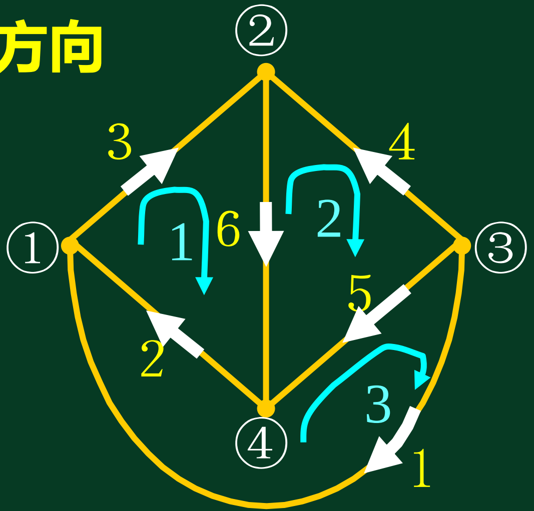
每一行对应一个独立回路，
每一列对应一条支路。

矩阵B的每一个元素定义为：

$$b_{ij} \begin{cases} 1 & \text{支路 } j \text{ 在回路 } i \text{ 中，且方向一致；} \\ -1 & \text{支路 } j \text{ 在回路 } i \text{ 中，且方向相反；} \\ 0 & \text{支路 } j \text{ 不在回路 } i \text{ 中。} \end{cases}$$

例 **取网孔为独立回路，顺时针方向**

$$[B]=\begin{array}{c|cccccc} \text{回}\backslash\text{支} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \end{array}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



注意 给定B可以画出对应的有向图。

基本回路矩阵B_f

独立回路对应一个树的单连枝回路的回路矩阵，称为基本回路矩阵$[B_f]$

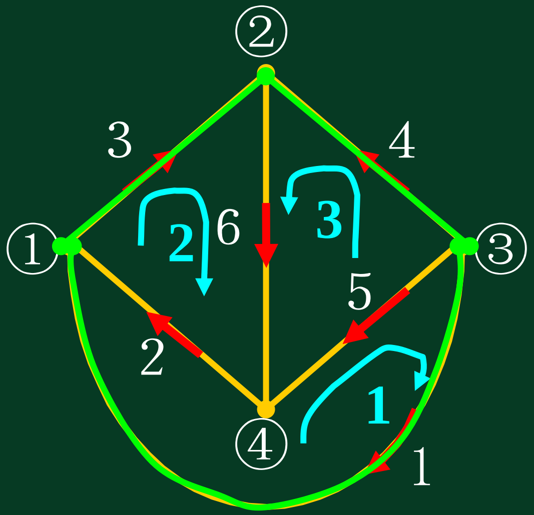
规定 ① 连支电流方向为回路电流方向；

② 支路排列顺序为先连支后树支，回路顺序与连支顺序一致。

例 选 2、5、6为树，连支顺序为1、 3 、 4 。

$$
\begin{array}{c|c}
\text{回}\backslash\text{支} & \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & [B] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
[B] = [\underbrace{1}_{B_l} \quad \underbrace{\;}_{B_t}] = [1 \;\; B_t]
$$



回路矩阵[*B*]的作用

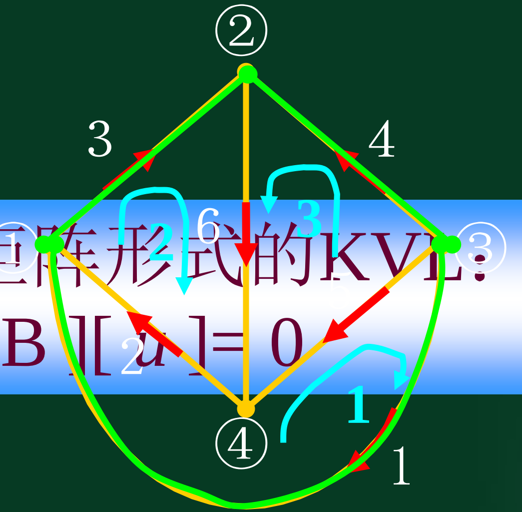
① 用回路矩阵[*B*]表示矩阵形式的KVL方程；

设 $[u]=[\underbrace{u_1\ u_3\ u_4}_{u_l}\ \underbrace{u_2\ u_5\ u_6}_{u_t}]$

$$[B][u]=\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} u_1-u_2-u_5 \\ u_3+u_2+u_6 \\ u_4-u_5+u_6 \end{bmatrix}=0$$

*l*个独立KVL方程



矩阵形式的KVL:
$[B][u]=0$

注意 连支电压可以用树支电压表示。

$$[B_f][u]=0 \rightarrow [1 \quad B_t]\begin{bmatrix} u_l \\ u_t \end{bmatrix}=0$$

$$u_l+B_t u_t=0 \qquad u_l=-B_t u_t$$

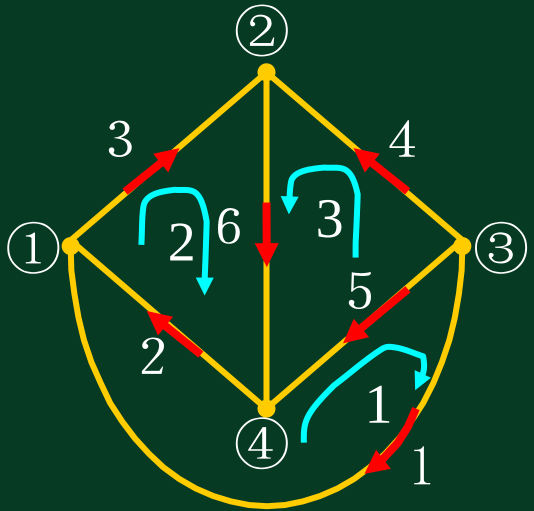
用回路矩阵$[B]^T$表示矩阵形式的KCL方程

设：$[i]=[i_1 \; i_3 \; i_4 \; i_2 \; i_5 \; i_6]^T$

$$[i_l]=\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix}$$

独立回路电流

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \\ -i_{l1}+i_{l2} \\ -i_{l1}-i_{l3} \\ i_{l2}+i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$



矩阵形式的KCL：　$[\,B\,]^{\mathrm{T}}[\,i_l\,]=[\,i\,]$

注意 **树支电流可以用连支电流表出。**

$$[B_f]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ B_t^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ B_t^T \end{bmatrix}[i_l] = \begin{bmatrix} i_l \\ i_t \end{bmatrix} \rightarrow B_t^T i_l = i_t$$

本节小结

在线开放课程

本节我们介绍了两种**电路的矩阵表示，即关联矩阵和回路矩阵**，要求掌握：

电路的矩阵表示；

关联矩阵定义及作用；

回路矩阵的定义及作用。