SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

线性动态电路的复频域分析

拉普拉斯变换的基本性质

主讲 ： 蔡承才

本节将介绍拉普拉斯变换的主要性质，主要包括：

线性性质；

微分性质；

积分性质；

延迟性质；

拉氏变换的卷积定理。

1.线性性质

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ， $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathcal{L}\left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] = A_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + A_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$

$$= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$$

证 $\mathcal{L}\left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} \left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] e^{-st} \mathrm{d}t$

$$= \int_{0_-}^{\infty} A_1 f_1(t) e^{-st} \mathrm{d}t + \int_{0_-}^{\infty} A_2 f_2(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$$

结论 **根据拉氏变换的线性性质，求函数与常数相乘及几个函数相加减的象函数时，可以先求各函数的象函数再进行相乘及加减计算。**

例1 求：$f(t)=K(1-e^{-at})$的象函数

解 $$F(s)=\mathrm{L}[K]-\mathrm{L}\left[Ke^{-at}\right]=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+a}=\frac{Ka}{s(s+a)}$$

例2 求：$f(t)=\sin(\omega t)$的象函数

解 $$F(s)=\mathrm{L}\left[\sin(\omega t)\right]=\mathrm{L}\left[\frac{1}{2\mathrm{j}}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\right]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

2. 微分性质

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

利用 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

若： $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则： $\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0_-)$

证 $\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \int_{0_-}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}f(t)$

$= e^{-st}f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t)(-se^{-st})\mathrm{d}t$

0

$= -f(0_-) + sF(s)$

若σ足够大

例 利用导数性质求下列函数的象函数

(1) $f(t)=\cos(\omega t)$的象函数

$$\mathscr{L}(\sin\omega t)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

解

$$\frac{\mathrm{d}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t}=\omega\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)=\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}(\sin\omega t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{L}[\cos\omega t]=\mathrm{L}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(\omega t))\right]$$

$$=\frac{1}{\omega}\left(s\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-0\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

(2) $f(t)=\delta(t)$的象函数

解

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{L}[\varepsilon(t)]=\frac{1}{s}$$

$$\mathrm{L}\left[\delta(t)\right]=\mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right]=s\frac{1}{s}-0=1$$

推广： $$\mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s[sF(s)-f(0_-)]-f'(0_-)$$

$$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-\cdots-f^{n-1}(0_-)$$

3.积分性质

若： $L[f(t)] = F(s)$　　则：$L[\int_{0_-}^{t} f(\xi)d\xi] = \frac{1}{s}F(s)$

证　令　$L[\int_{0^-}^{t} f(t)dt] = \phi(s)$

应用微分性质

$$L[f(t)] = L\left[\frac{d}{dt}\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right]$$

$$\Rightarrow F(s) = s\phi(s) - \int_{0_-}^{t} f(t)dt\Big|_{t=0_-}$$

0

$$\Rightarrow \phi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

例　求：$f(t)=t\varepsilon(t)$和$f(t)=t^{2}\varepsilon(t)$的象函数

解

$$L[t\varepsilon(t)]=L[\int_{0^-}^{\infty}\varepsilon(t)dt]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

$$L[t^2\varepsilon(t)]=L[2\int_{0}^{t}tdt]=\frac{2}{s^3}$$

4.延迟性质

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

若： $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 　则： $\mathcal{L}[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

证

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\right] = \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}\mathrm{d}t$$

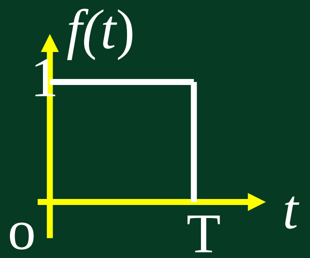
令 $t - t_0 = \tau$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}\mathrm{d}\tau = e^{-st_0}\int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-st_0}F(s)$$

e^{-st_0} 延迟因子

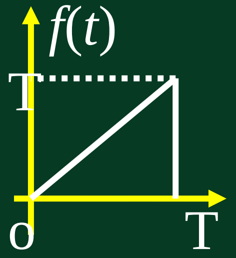
例1 求矩形脉冲的象函数



解 $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$

根据延迟性质 $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}$

例2 求三角波的象函数

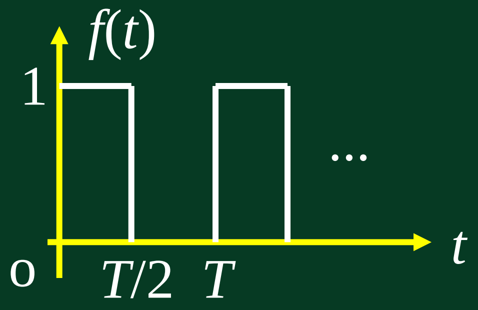


解 $f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$

$$f(t)=t\varepsilon(t)-(t-T)\varepsilon(t-T)-T\varepsilon(t-T)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-sT}-\frac{T}{s}e^{-sT}$$

例3 **求周期函数的拉氏变换**



解 设$f_1(t)$为一个周期的函数

$$\mathrm{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$

$$\because\ f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)\varepsilon(t-T) + f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T) + \cdots$$

$$\mathrm{L}[f(t)] = F_1(s) + e^{-sT}F_1(s) + e^{-2sT}F_1(s) + \cdots$$

$$= F_1(s)[e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots] = \frac{1}{1-e^{-sT}}F_1(s)$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s)$$

对于本题脉冲序列 $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{T}{2})$

$\rightarrow$ $F_1(s) = (\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT/2})$

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} (\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT/2}) = \frac{1}{s} (\frac{1}{1+e^{-sT/2}})$$

5.拉普拉斯的卷积定理

若： $\mathrm{L}[f_1(t)] = F_1(s) \quad \mathrm{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则： $\mathrm{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathrm{L}\int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$= F_1(s)F_2(s)$$

证

$$\mathrm{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\xi)\varepsilon(t-\xi) f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t$$

令 $x = t - \xi$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(x)\varepsilon(x) f_2(\xi)e^{-s\xi}e^{-sx}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty f_1(x)\varepsilon(x)e^{-sx}\mathrm{d}x\int_0^\infty f_2(\xi)e^{-s\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$= F_1(s)F_2(s)$$

本节小结

本节我们介绍了拉普拉斯变换的常见性质，
要求掌握：

线性性质；

微分性质；

积分性质；

延迟性质；

拉氏变换的卷积定理。