石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

正弦交流电路

相量法基础

主讲 ： 薛强

本节内容

- 正弦量的相量表示
- 相量法应用

一. 正弦量的相量表示

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

造一个复函数

$$F(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\Psi)$$

对 $F(t)$ 取实部 $\mathrm{Re}[F(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)=i(t)$

结论 任意一个正弦时间函数都有唯一与其对应的复数函数。

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\leftrightarrow F(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$$

一. 正弦量的相量表示

$F(t)$ 还可以写成 复常数

$$F(t)=\sqrt{2}\underbrace{Ie^{\mathrm{j}\psi}}e^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}$$

正弦量对应的相量

$F(t)$ 包含了三要素：I、 Ψ、ω,

复常数包含了两个要素：I, Ψ。

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi) \leftrightarrow F(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi) \Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\Psi$$

注意

- 相量的模表示正弦量的有效值
- 相量的幅角表示正弦量的初相位

一. 正弦量的相量表示

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$

例1 已知 $i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\text{A}$

$u=311.1\cos(314\text{t}-60^{\circ})\text{V}$

试用相量表示i, u .

解 $\dot{I}=100\angle 30^{\circ}\,\text{A},\quad \dot{U}=220\angle-60^{\circ}\,\text{V}$

例2 已知 $\dot{I}=50\angle 15^{\circ}\,\text{A},\ f=50\text{Hz}$.

试写出电流的瞬时值表达式。

解 $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^{\circ})\,\text{A}$

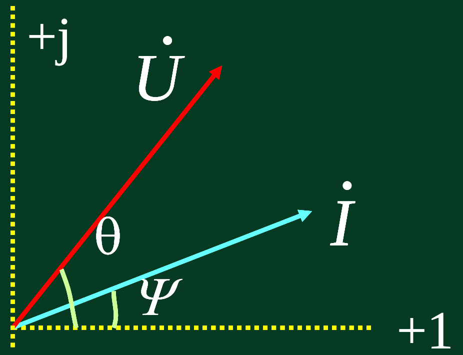
一. 正弦量的相量表示

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

- 相量图 → 在复平面上用矢量表示相量的图

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\rightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\rightarrow \dot{I}=I\angle\Psi$$



二. 相量法的应用

在线开放课程

①同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\Psi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\Psi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}e^{\mathrm{j}\omega t})$$

相量关系为：$\boxed{\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2}$

结论 同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。

二. 相量法的应用

$$i_1 \pm i_2 = i_3$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

例 $u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)\ \text{V}$

$u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ)\ \text{V}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{cases}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ$$

$$= 5.19 + \text{j}3 + 2 + \text{j}3.46 = 7.19 + \text{j}6.46$$

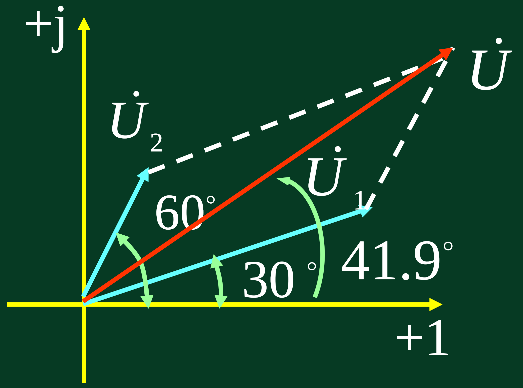
$$= 9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

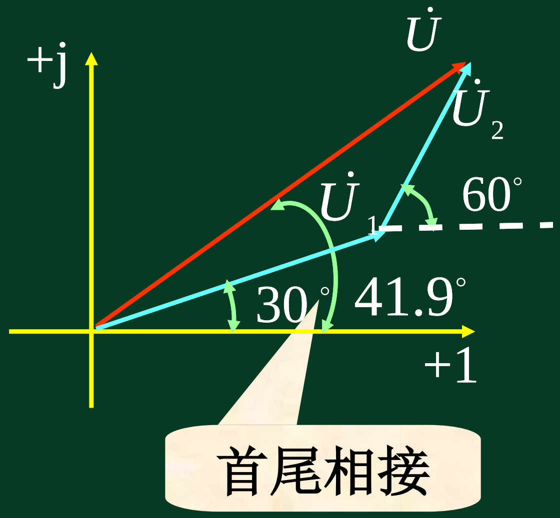
$$\therefore\ u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^\circ)\ \text{V}$$

二. 相量法的应用

借助相量图计算

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ\ \text{V} \qquad \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ\ \text{V}$$





二. 相量法的应用

②正弦量的微分、积分运算

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)\leftrightarrow \dot{I}=I\angle\psi_i$$

微分运算 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\cdot\mathrm{j}\omega\, e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

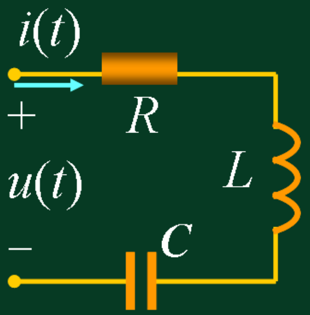
积分运算 $$\int i\mathrm{d}t=\int\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow\mathrm{j}\omega\dot{I}=\omega I\angle\psi_i+\pi/2$$

$$\int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}=\frac{I}{\omega}\angle\psi_i-\pi/2$$

二. 相量法的应用

例



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$u(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

用相量运算：
$$\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$$

相量法的优点

①把时域问题变为复数问题；

②把微积分方程的运算变为复数方程运算；

③可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

小结

- 正弦量的相量表示
- 相量法应用