



石家莊鐵道大學  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

图与网络分析

最短路问题

主讲：陈慧青



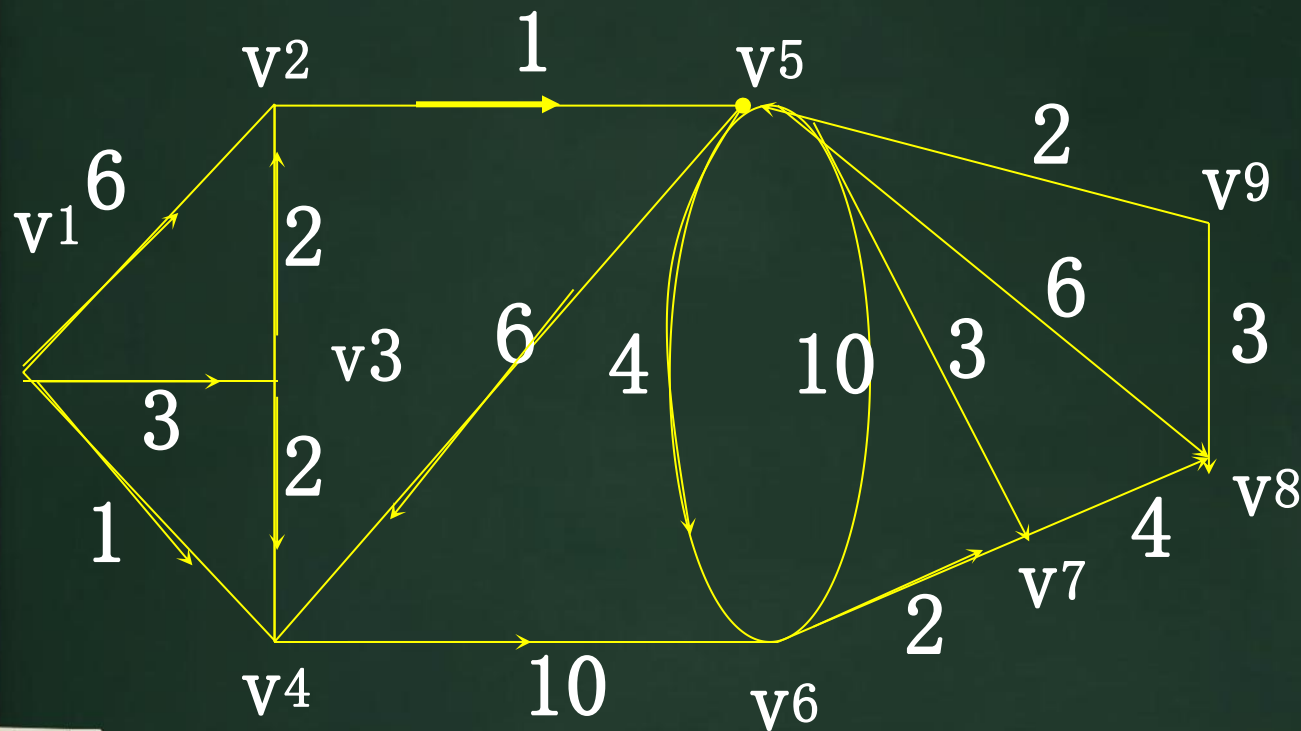
## 问题的提出

最短路径问题是图论中十分重要的最优化问题之一，它作为一个经常被用到的基本工具，可以解决生产实际中的许多问题，比如城市中的管道铺设，线路安排，工厂布局，设备更新等等。也可以用于解决其它的最优化问题。



## 问题的提出

例7. 4: 如图7-9所示的单行线交通网，每个弧旁边的数字表示这条单行线的长度。现在有一个人要从 $v_1$ 出发，经过这个交通网到达 $v_8$ ，要寻求是总路程最短的线路。


 图7-9


## 📍 最短路问题

从  $v_1$  到  $v_8$  的路线是很多的。比如从  $v_1$  出发，经过  $v_2, v_5$  到达  $v_8$  或者从  $v_1$  出发，经过  $v_4, v_6, v_7$  到达  $v_8$  等等。但**不同的路线，经过的总长度是不同的**。例如，按照第一个线路，总长度是  $6+1+6=13$  单位，按照第二个路线，总长度是  $1+10+2+4=17$  单位。



# 数学模型

**一般意义下的最短路问题：** 设一个**赋权有向图** $D = (V, A)$ ，对于每一个弧 $a = (v_i, v_j)$ ，相应地有一个权 $w_{ij}$ 。 $v_s, v_t$ 是 $D$ 中的两个顶点， $P$ 是 $D$ 中从 $v_s$ 到 $v_t$ 的任意一条路，定义路的权是 $P$ 中所有**弧的权的和**，记作 $S(p)$ 。最短路问题就是要在所有从 $v_s$ 到 $v_t$ 的路 $P$ 中，寻找一个**权最小的路** $P_0$ ，亦即 $S(P_0) = \min S(p)$ 。 $P_0$ 叫做从 $v_s$ 到 $v_t$ 的最短路。 $P_0$ 的权 $S(P_0)$ 叫做从 $v_s$ 到 $v_t$ 的距离，记作 $d(v_s, v_t)$ 。

# 📍 Dijkstra算法

下面介绍在一个赋权有向图中寻求最短路的方法——Dijkstra算法，它是在1959年提出来的。目前公认，在所有的权 $w_{ij} \geq 0$ 时，这个算法是寻求最短路问题最好的算法。并且，这个算法实际上也给出了寻求从一个始定点 $v_s$ 到任意一个点 $v_j$ 的最短路，所以称为**完备算法**。



## Di jkstra算法

Di jkstra算法的**基本思想**是从 $v_s$ 出发，逐步向外寻找最短路。在运算过程中，与每个点对应，记录一个数，叫做一个点的**标号**。它或者表示从 $v_s$ 到该点的**最短路权**（叫做P 标号），或者表示从 $v_s$ 到该点**最短路权的上界**（叫做T 标号）。算法的每一步是去修改T 标号，把某一个具有T 标号的点改变为具有P 标号的点，使图D 中具有P 标号的顶点多一个。这样，至多经过 $P - 1$ 步，就可求出从 $v_s$ 到各点 $v_j$ 的最短路。



# Di jkstra算法

Di jkstra算法常用步骤：

(1) 给始点 $v_s$ 标上永久标号 $P(v_s)=0$ ，其余各点标上临时标号 $T(v_j)=w_{ij}$ ，即 $v_s$ 到 $v_j$ 的路权，与 $v_s$ 不直接相连的点赋予临时标号

$T(v_j)=\infty$ ；

(2) 在临时标号中集中求一点使得 $P(v_i)=\min\{T(v_j)\}$ ，即已求得 $v_s$ 到 $v_i$ 的最短路权，变 $v_i$ 的临时标号为永久标号 $P(v_i)$ ；

## 📍 Dijkstra算法

(3) 考察新的P标号点 $v_i$ ，**修改**与之关联的各点 $v_j$ 的临时标号，使得

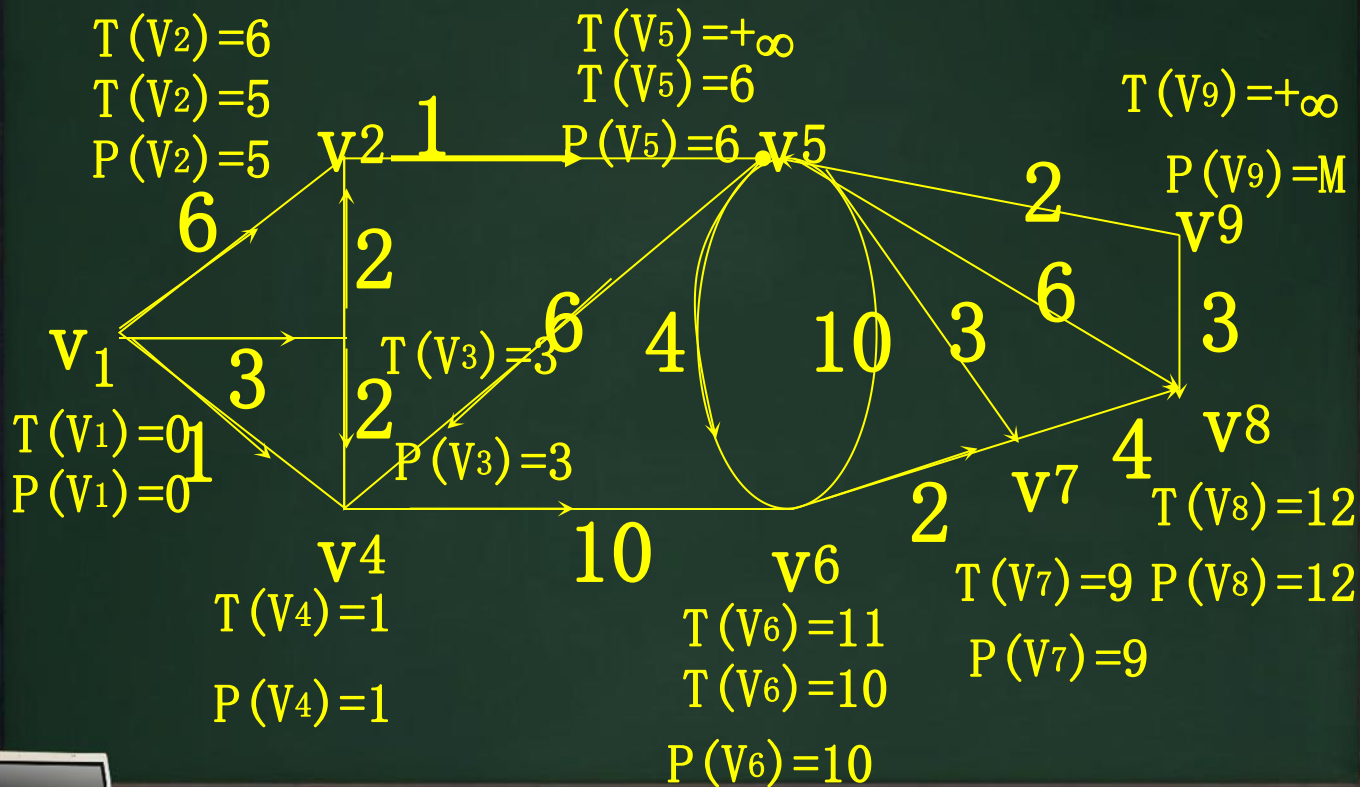
$$T(v_j) = \min\{T(v_j), p(v_i) + w_{ij}\}$$

(4) 若有向图D中**没有了临时标号**，则标号过程结束；否则返回(2)步。

下面对例题进行标号：



# Di jkstra算法



# Di jkstra算法

**最短路：**  $V_1-V_3-V_2-V_5-V_8$ , 路权之和为12

从 $v_1$ 到 $v_8$ 的最短路是  $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_8)$ 。

同理，可以求出从 $v_1$ 到任一点 $v_i$ 的最短路，显然不存在从 $v_1$ 到 $v_9$ 的最短路。



# 最短路问题

## 例7.5 设备更新问题。

某公司使用一台设备，在每年年初，公司就要决定是购买新的设备还是继续使用旧设备。如果购置新设备，就要支付一定的**购置费**，当然新设备的维修费用就低。如果继续使用旧设备，可以省去购置费，但**维修费用**就高了。请设计一个五年之内的更新设备的计划，使得五年内购置费用和维修费用总的支付费用最小。

# 📍 最短路问题

已知：设备每年年初的价格表

年份	1	2	3	4	5
年初价格	11	11	12	12	13

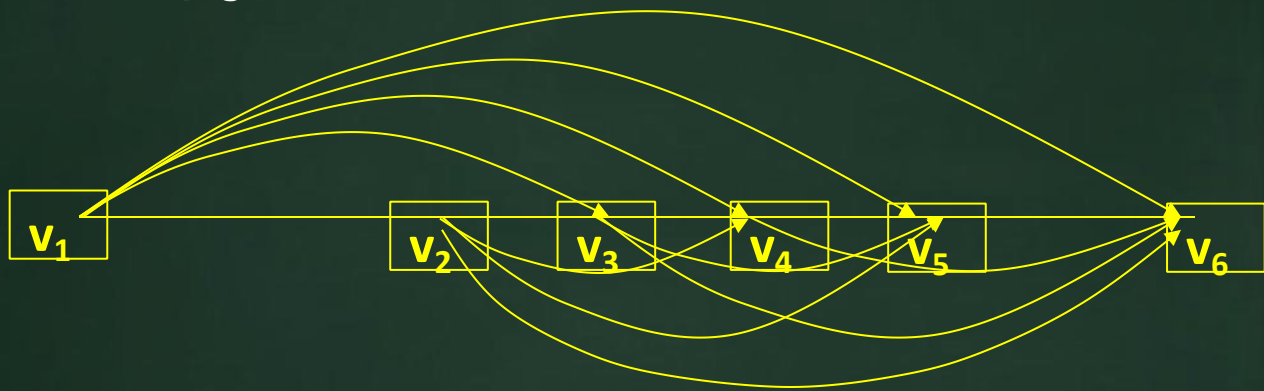
设备维修费如下表

使用年数	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
每年维修费用	5	6	8	11	18

# 最短路问题

将问题转化为最短路问题，如下图：

用 $v_i$ 表示“第 $i$ 年年初购进一台新设备”，  
弧 $(v_i, v_j)$ 表示第 $i$ 年年初购进的设备一直使用到第 $j$ 年年初。



# 最短路问题

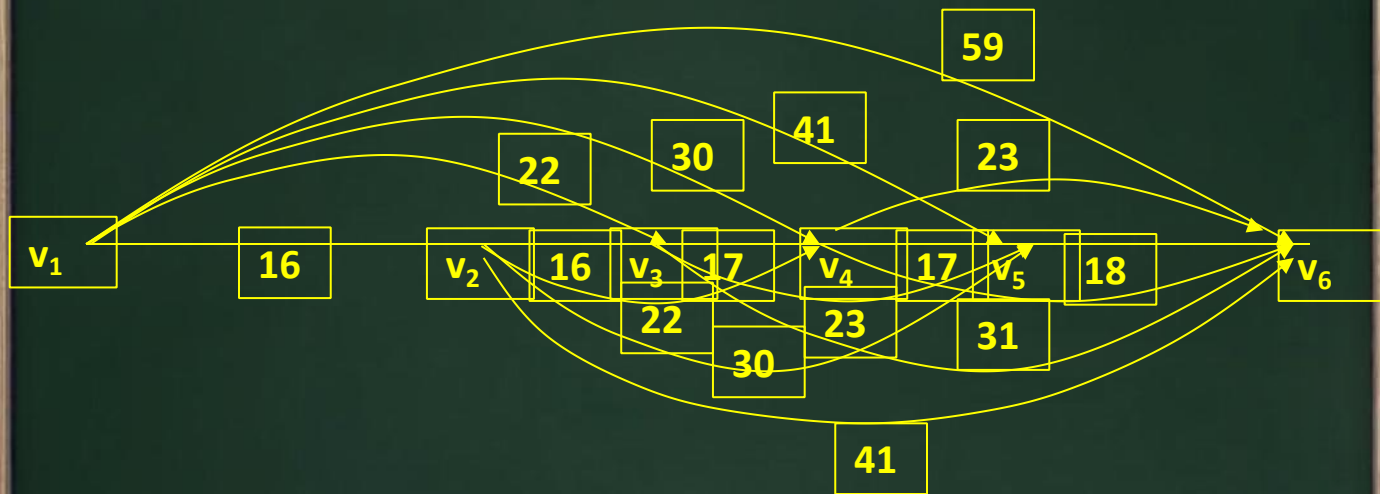
把所有弧的权数计算如下表：

	1	2	3	4	5	6
1		16	22	30	41	59
2			16	22	30	41
3				17	23	31
4					17	23
5						18
6						



# 最短路问题

把权数赋到图中，再用Dijkstra算法求最短路。



## 📍 最短路问题

最终得到 $v_1$ 到 $v_6$ 的距离是53，即最低费用为53

最短路径有两条：

$v_1 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_6$  和  $v_1 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_6$