石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

# 整数规划

## 指派问题（二）

主讲 ： 陈慧青

# 匈牙利解法

例5 求下表所示效率矩阵的指派问题的最小解。

| 任务<br>人员 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 12 | 7 | 9 | 7 | 9 |
| 乙 | 8 | 9 | 6 | 6 | 6 |
| 丙 | 7 | 17 | 12 | 14 | 9 |
| 丁 | 15 | 14 | 6 | 6 | 10 |
| 戊 | 4 | 10 | 7 | 10 | 9 |

# 匈牙利解法

**解** 按解法第一步，将这系数矩阵进行变换。

$$
\begin{array}{c}
\\
\begin{pmatrix}
12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\
8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\
7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\
15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\
4 & 10 & 7 & 10 & 9
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\min \\
7 \\ 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 6 & 3 & 6 & 5
\end{pmatrix}
$$

经一次运算即得每行每列都有0元素的系数矩阵

# 匈牙利解法

若n较大时，就必须按一定的步骤去找，常用的步骤为：

（1）从**只有一个0元素**的行(列)开始，给这个0元素加圈，记作◎。这表示对这行所代表的人，只有一种任务可指派。然后划去◎所在列(行)的其他0元素，记作Φ。这表示这列所代表的任务已指派完，**不必再考虑别人**了。

（2）给只有一个0元素列(行)的0元素**加圈**，记作◎；然后划去◎所在行的0元素，记作Φ。

（3）反复进行(1)，(2)两步，直到**所有0元素都被圈出和划掉**为止。

# 匈牙利解法

再按上述步骤运算，得到

$$\begin{pmatrix} 5 & \Theta & 2 & \phi & 2 \\ 2 & 3 & \phi & \Theta & \phi \\ \Theta & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \Theta & \phi & 4 \\ \phi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

这里◎的个数m=4，而n=5；所以解题没有完成，这时应按以下步骤继续进行。

# 匈牙利解法

(4) 若◎元素的数目m**等于矩阵的阶数n**，那么这指派问题的最优解已得到。若m＜n，则转入下一步。

**第三步**：作**最少的直线覆盖所有0元素**，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。为此按以下步骤进行：

# 匈牙利解法

（1）对没有◎的行打√号；

（2）对已打√号的行中所有含0元素的列打√号；

（3）再对打有√号的列中含0元素的行打√号；

（4）重复(2)，(3)直到得不出新的打√号的行、列为止。

（5）对没有打√号的行画一横线，有打√号的列画一纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

# 匈牙利解法

令这直线数为 $l$。若 $l<n$，说明必须再变换当前的系数矩阵，才能找到n个独立的0元素，为此转第四步：若 $l=n$，而 $m<n$，应回到第二步(4)，另行试探。

在例5中，对矩阵①按以下次序进行：

先在第五行旁打√，接着可判断应在第1列下打√，接着在第3行旁打√。经检查不再能打√了。对没有打√行，画一直线以覆盖0元素，已打√的列画一直线以覆盖0元素。得

# 匈牙利解法

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & \Theta & 2 & \varphi & 2 \\ 2 & 3 & \varphi & \Theta & \varphi \\ \Theta & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \Theta & \varphi & 4 \\ \varphi & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \Leftarrow \\ \\ \Leftarrow \end{array} \\ \Uparrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad & \end{array}$$

注意：矩阵中的符号，即文中的√符号。

由此可见l=4<n。所以应继续对②矩阵进行变换。转第四步。

# 匈牙利解法

**第四步：**

对矩阵进行变换的目的是**增加0元素**。为此在**没有被**直线覆盖的部分中找出**最小元素**。然后在打√行各元素中都**减去**这最小元素，而在打√列的各元素都**加上**这最小元素，以保证原来0元素不变。这样得到新系数矩阵（它的最优解和原问题相同）。若得到n个独立的0元素，则已得最优解，否则回到第三步重复进行。

# 匈牙利解法



在例5的矩阵中，在没有被覆盖部分(第3、5行)中找出最小元素为2，然后在第3、5行各元素分别减去2，给第1列各元素加2，得到新矩阵③。按第二步，找出所有独立的0元素，得到矩阵④。

# 匈牙利解法



$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

③

④

$$\begin{pmatrix} 7 & \Theta & 2 & \phi & 2 \\ 4 & 3 & \phi & \Theta & \phi \\ \phi & 8 & 3 & 5 & \Theta \\ 11 & 8 & \Theta & \phi & 4 \\ \Theta & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

# 匈牙利解法

已具有**n个独立0元素**。这就得到了最优解，相应的解矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由解矩阵得最优指派方案
甲—B，乙—D，丙—E，丁—C，戊—A
本例还可以得到另一最优指派方案
甲—B，乙—C，丙—E，丁—D，戊—A
所需总时间为min z=32

# 匈牙利解法

当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了**同行和同列中都有两个或两个以上0元素**时。这时可以任选一行(列)中某一个0元素，再划去同行(列)的其他0元素。这时会出现**多重解**。

# 匈牙利解法



## 关于不平衡的指派问题

1. 当人数m大于工作数n时，加上m-n项工作

例如：

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 \\ 7 & 17 & 12 \\ 15 & 14 & 6 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 17 & 12 & 0 & 0 \\ 15 & 14 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 当人数m小于工作数n时，加上n-m个人