整数规划

指派问题（一）

主讲 ：陈慧青

问题的提出

在生活中经常遇到这样的问题，某单位需完成n项任务，**恰好**有n个人可承担这些任务。由于每人的专长不同，各人完成任务不同(或所费时间)，效率也不同。于是产生应指派哪个人去完成哪项任务，使完成n项任务的总效率最高(或所需总时间最小)。这类问题称为**指派问题或分派问题**(assignment problem)。

问题的提出

例4　有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字。分别记作E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需时间如表5-7所示。问应指派何人去完成何工作，使所需总时间最少?

每个人完成任务所花的时间如下表所示：

任务 / 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

类似有：有n项加工任务，怎样指派到n台机床上分别完成的问题；有n条航线，怎样指定n艘船去航行问题……。对应每个指派问题，需有类似表5-7那样的数表，称为**效率矩阵或系数矩阵**，其元素$c_{ij}>0$（i，j=1，2，…，n）表示指派第i人去完成第j项任务时的效率（或时间、成本等）。解题时需引入变量x_{ij}；其取值只能是**1或0**。并令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务} \\ 0, & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务}\end{cases}$$

数学模型

当问题要求**极小化**时数学模型是：

目标函数 $\min z=\sum_{i}\sum_{j}c_{ij}x_{ij}$ ①

$$
\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{i}x_{ij}=1, \quad j=1,2,\cdots,n & ② \\ \sum_{j}x_{ij}=1, \quad i=1,2,\cdots,n & ③ \\ x_{ij}=1\text{或}0 & ④\end{cases} \qquad (5\text{–}4)
$$

指派模型特点

约束条件②说明第j项任务只能由1人去完成；

约束条件③说明第i人只能完成1项任务。

满足约束条件②～④的可行解x_{ij}也可写成表格或矩阵形式，称为解矩阵。

如例4的一个可行解矩阵

$$x_{ij}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

显然，解矩阵(x_{ij})中各行各列的元素之和都是1。但这不是最优。

指派模型特点

指派问题是**0-1规划的特例**，也是**运输问题的特例**；即$n=m$, $a_j=b_i=1$

当然可用整数线性规划，0-1规划或运输问题的解法去求解，这就如同用单纯形法求解运输问题一样是不合算的。利用指派问题的特点可有更简便的解法匈牙利解法。

指派模型特点

指派问题的**最优解**有这样性质，若从系数矩阵(c_{ij})的一行(列)各元素中**分别减去该行(列)的最小元素**，得到新矩阵(b_{ij})，

那么以(b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的**最优解相同**。

指派模型特点

利用这个性质，可使原系数矩阵变换为含有**很多0元素**的新系数矩阵，而**最优解保持不变**，在系数矩阵(b_{ij})中，我们关心位于不同行不同列的0元素，以下简称为**独立的0元素**。

若能在系数矩阵(b_{ij})中找出**n个独立的0元素**；则令解矩阵(x_{ij})中对应这n个独立的0元素的元素取值为1，其他元素取值为0。将其代入目标函数中得到$z_b=0$，它一定是最小。

这就是以(b_{ij})为系数矩阵的指派问题的最优解。也就得到了原问题的最优解。

匈牙利解法

以下用例4来说明指派问题的匈牙利解法。

第一步： 使指派问题的系数矩阵经变换，在各行各列中都出现0元素。

（1）从系数矩阵的每行元素**减去该行**的最小元素；

（2）再从所得系数矩阵的每列元素中**减去该列**的最小元素。

若某行(列)已有0元素，那就不必再减了。

匈牙利解法

$$
(c_{ij}) = \begin{array}{cc} & \min \\ \begin{pmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{matrix} \end{array}
$$

行列都有零元素

$$
\to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} & & 4 & 2 \end{matrix} \ \min \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (b_{ij})
$$

匈牙利解法

第二步：进行**试指派**，以寻求最优解。为此，按以下步骤进行。

经第一步变换后，系数矩阵中**每行每列都已有了0元素**；但需找出n个独立的0元素。若能找出，就以这些独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。当n较小时，可用**观察法**、**试探法**去找出n个独立0元素。

匈牙利解法

现用例4的 (b_{ij}) 矩阵，按上述步骤进行运算。按步骤(1)，先给 b_{22} 加圈，然后给 b_{31} 加圈，划掉 b_{11}，b_{41}；按步骤(2)，给 b_{43} 加圈，划掉 b_{44}，最后给 b_{14} 加圈，得到

$$\begin{pmatrix} \phi & 13 & 7 & \Theta \\ 6 & \Theta & 6 & 9 \\ \Theta & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & \Theta & \phi \end{pmatrix}$$

注意：矩阵中符号即是文中的◎符号。以下同。

匈牙利解法

可见m=n=4, 所以得最优解为

$$(x_{ij})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

这表示：**指定甲译出俄文，乙译出日文，丙译出英文，丁译出德文。所需总时间最少**

$$\min \quad z_b=\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}=0$$

$$\min \quad z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}=c_{31}+c_{22}+c_{43}+c_{14}=28\ (\text{小时})$$