



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

整数规划

隐枚举法

主讲：陈慧青



📍 隐枚举法

解0-1型整数线性规划最容易想到的方法，和一般整数线性规划的情形一样，就是**穷举法**，即检查变量取值为0或1的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解，这就需要检查变量取值的 **2^n 个组合**。对于变量个数 n 较大（例如 $n > 10$ ），这几乎是不可能的。

因此常设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求到问题的最优解。这样的方法称为**隐枚举法** (implicit enumeration)。



隐枚举法

例3 目标函数 $\max z=3x_1-2x_2+5x_3$
约束条件:

$$x_1+2x_2-x_3 \leq 2 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1+4x_2+x_3 \leq 4 \quad \textcircled{2} \quad (5-2)$$

$$x_1+x_2 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$4x_1+x_3 \leq 6 \quad \textcircled{4}$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \quad \textcircled{5}$$

📍 隐枚举法

解题时先通过试探的方法找一个可行解，容易看出 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 就是合于①~④条件的，算出相应的目标函数值 $z=3$ 。

我们求最优解，对于极大化问题，当然希望 $z \geq 3$ ，于是增加一个约束条件：

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \quad \odot$$

后加的条件称为**过滤条件**(filtering constraint)。



隐枚举法

点	条件					满足条件? 是(√)否(×)	z 值
	⊙	①	②	③	④		
(0, 0, 0)	0					×	
(0, 0, 1)	5	-1	1	0	1	√	5
(0, 1, 0)	-2					×	
(0, 1, 1)	3	1	5			×	
(1, 0, 0)	3	1	1	1	0	√	3
(1, 0, 1)	8	0	2	1	1	√	8
(1, 1, 0)	1					×	
(1, 1, 1)	6	2	6			×	

📍 隐枚举法

用全部枚举的方法，3个变量共有 $2^3=8$ 个解，原来4个约束条件，共需**32次运算**。现在增加了过滤条件◎，就可减少运算次数。

实际只作**24次运算**。

求得最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$,

$\max z=8$



📍 隐枚举法

在计算过程中，若遇到 z 值已超过条件◎右边的值，应**改变条件◎**，使右边为迄今为止最大者，然后继续做。例如，当检查点 $(0, 0, 1)$ 时因 $z=5 (>3)$ ，所以应将条件◎换成

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \quad \text{◎}$$

这种对**过滤条件的改进**，更可以减少计算量。



隐枚举法

一般常重新排列 x_i 的顺序使目标函数中 x_i 的系数是**递增(不减)**的，在上例中，

改写 $z=3x_1-2x_2+5x_3=-2x_2+3x_1+5x_3$

因为-2, 3, 5是递增的序，变量 (x_2, x_1, x_3)

也按下述顺序取值： $(0, 0, 0)$ ，

$(0, 0, 1)$ ， $(0, 1, 0)$ ， $(0, 1, 1)$ ， \dots ，

这样，最优解容易比较早的发现。

再结合过滤条件的改进，更可使计算简化

隐枚举法

在上例中

$$\max z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$$

$$-2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 \quad \textcircled{\textcircled{0}}$$

$$2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 \quad \textcircled{1}$$

$$4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 \quad \textcircled{2} \quad (5-3)$$

$$x_2 + x_1 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$4x_2 + x_3 \leq 6 \quad \textcircled{4}$$

解题时按下述步骤进行：



隐枚举法

隐枚举法计算表 (a)

点 (x_2, x_1, x_3)	条件					满足条件? 是(√)否(X)	z 值
	①	②	③	④	⑤		
(0, 0, 0)	0					X	
(0, 0, 1)	5	-1	1	0	1	√	5

隐枚举法

隐枚举法计算表 (b)

点 (x_2, x_1, x_3)	条件					满足条件? 是(√)否(×)	z 值
	①'	①	②	③	④		
(0, 1, 0)	3					×	
(0, 1, 1)	8	0	2	1	1	√	8

隐枚举法

隐枚举法计算表 (c)

⊗ 点 (x_2, x_1, x_3)	条件				满足条件? 是(√) 否(×)	z 值
	⊙ "	①	②	③		
(0, 0, 0)	2					×
(0, 0, 1)	3					×
(1, 1, 0)	1					×
(1, 1, 1)	6					×

隐枚举法

改进过滤条件，用

$$-2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 5 \quad \textcircled{\circ}'$$

代替 $\textcircled{\circ}$ ，继续进行。

再改进过滤条件，用

$$2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 8 \quad \textcircled{\circ}''$$

代替 $\textcircled{\circ}'$ ，再继续进行。至此， z 值已不能改进，即得到最优解，解答如前，但计算已简化。只做16次运算，就已取得最优解。