



石家庄铁道大学  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

整数规划

整数规划的数学模型

主讲：陈慧青



## 问题的提出

在前面讨论的线性规划问题中，有些最优解可能是分数或小数，但对于某些具体问题，常有要求解答必须是整数的情形(称为整数解)。例如，所求解是机器的**台数**、完成工作的**人数**或装货的**车数**等，分数或小数的解答就不合要求。

因此，对求最优整数解的问题，有必要另行研究。我们称这样的问题为**整数规划**(integer linear programming)，简称ILP。

## 问题的提出

整数线性规划中如果所有的变量都限制为(非负)整数, 就称为**纯整数线性规划**(pure integer linear programming)或称为**全整数线性规划**(all integer linear programming); 如果仅一部分变量限制为整数, 则称为**混合整数规划**(mixed integer linear programming)。整数线性规划的一种特殊情形是**0-1规划**, 它的变数取值仅限于0或1。

# 问题的提出

一个(纯)整数线性规划问题, 用数学式可表示为:

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 \quad \textcircled{1}$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad \textcircled{2}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 13 \quad \textcircled{3} \quad (5.1)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_1, x_2 \text{ 整数} \quad \textcircled{5}$$

它和线性规划问题的区别仅在于最后的条件⑤。现在我们暂不考虑这一条件, 即解①~④(以后我们称这样的问题为与原问题相应的线性规划问题), 也称为**其松弛问题**。



# 问题的提出

将要求解的整数线性规划问题称为问题A，  
将与它相应的线性规划问题其松弛问题称为问题B。  
解问题B，可能得到以下情况之一。

- ① B没有可行解，这时A也没有可行解，则停止。
- ② B有最优解，并符合问题A的整数条件，B的最优解即为A的最优解，则停止。
- ③ B有最优解，但不符合问题A的整数条件，用分支定界法或者割平面法求解。

## 0-1型整数规划

0-1型整数线性规划是整数线性规划中的特殊情形，它的变量 $x_i$ 仅取值0或1。这时 $x_i$ 称为0-1变量，或称**二进制变量**。 $x_i$ 仅取值0或1这个条件可由下述约束条件所代替。

$$x_i \leq 1, \quad x_i \geq 0, \quad \text{整数}$$

## 0-1型整数规划

它和一般整数线性规划的约束条件形式是一致的。在实际问题中，如果引入0-1变量，就可以把有各种情况需要分别讨论的线性规划问题统一在一个问题中讨论了。在本节我们先介绍引入0-1变量的实际问题，再研究解法。



## 0-1型整数规划

例1 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有7个位置(点) $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ )可供选择。

规定：

在东区，由 $A_1, A_2, A_3$ 三个点中**至多**选两个；

在西区，由 $A_4, A_5$ 两个点中**至少**选一个；

在南区，由 $A_6, A_7$ 两个点中**至少**选一个。

如选用 $A_i$ 点，设备投资估计为 $b_i$ 元，每年可获利润估计为 $c_i$ 元，但投资总额不能超过 $B$ 元。问应选择哪几个点可使年利润为最大？



## 0-1型整数规划

投资场所的选定——相互排斥的计划

先引入0-1变量 $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ )

$$\text{令 } x_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } A_i \text{ 点被选用} \\ 0, & \text{当 } A_i \text{ 点没有被选用} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

# 0-1型整数规划

于是问题模型可列成：

目标函数：
$$\max z = \sum_{i=1}^7 c_i x_i$$

约束条件 
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^7 b_i x_i \leq B \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \quad (5-8)$$

## 0-1型整数规划

例2 某校篮球队准备从以下6名预备队员中选拔3名为正式队员，使其平均身高尽可能的高，这6名预备队员情况如下表所示。

队员的挑选要满足以下条件：

- (1) 至少补充一名后卫队员；
- (2) 大李和小田之间只能入选一名；
- (3) 最多补充一名中锋；

## 0-1型整数规划

(4) 如果大李或小赵入选，小周就不能入选。

各预备队员情况

预备队员	身高	位置
大张	193	中锋
大李	191	中锋
小王	187	前锋
小赵	186	前锋
小田	180	后卫
小周	185	后卫



## 0-1型整数规划

解：设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 分别代表大张、大李、小王、小赵、小田、小周是否被选上，取值1表示选上，为0表示未被选上。

则目标函数为：

$$\max z = (193x_1 + 191x_2 + 187x_3 + 186x_4 + 180x_5 + 185x_6) / 3$$

# 0-1型整数规划

约束条件:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$$

$$x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_6 \leq 1$$

$$x_4 + x_6 \leq 1$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  为 1 或者 0