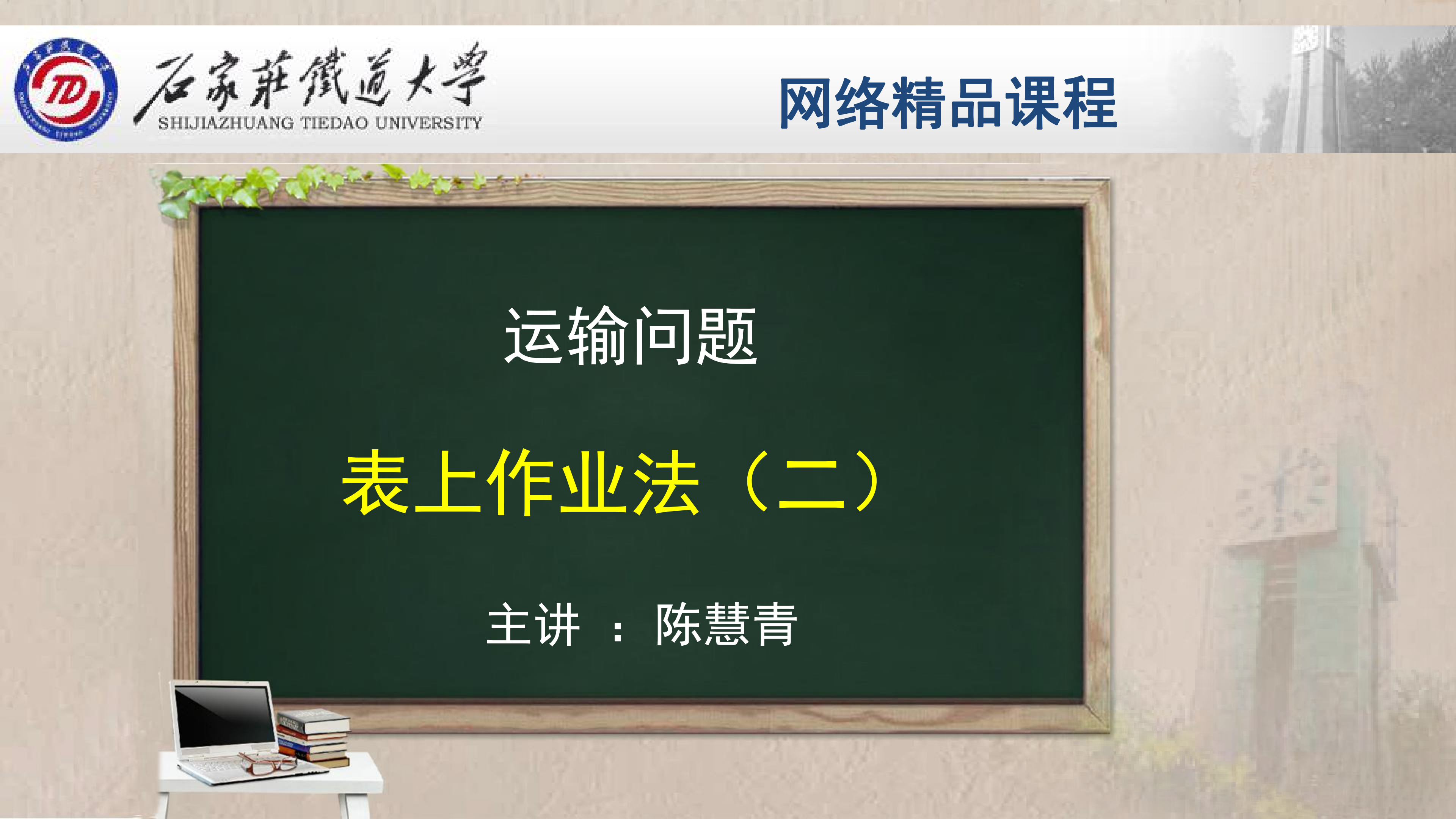
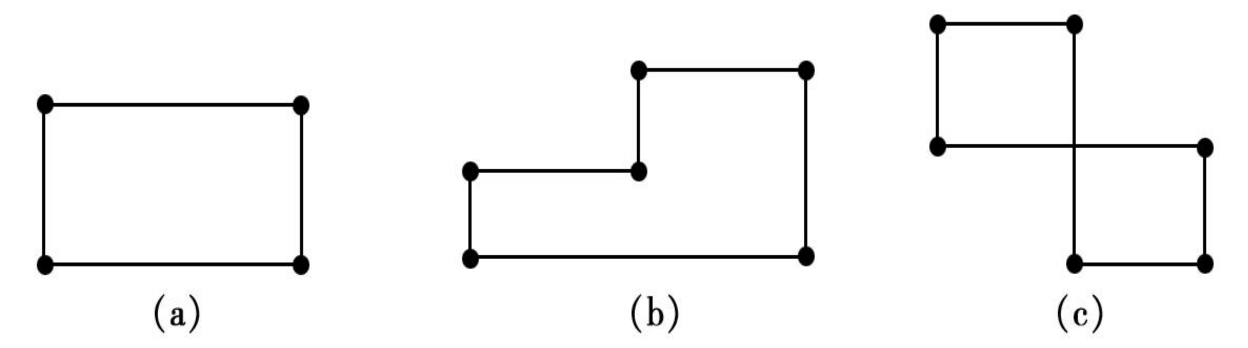

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程
运输问题
表上作业法（二）
主讲 ：陈慧青

表上作业法

最优性检验就是检查所得到的方案是不是最优方案。检查的方法与单纯形方法中的原理相同，即计算检验数。由于目标要求极小，因此，当所有的检验数都大于或等于零时该调运方案就是最优方案；否则就不是最优，需要进行调整。下面介绍两种求检验数的方法。

1. 闭回路法

在给出调运方案的计算表上，从每一空格出发找一条闭回路。它是以某空格为起点。用水平或垂直线向前划，当碰到一数字格时可以转90°后，继续前进，直到回到起始空格为止。闭回路如图4-1的(a),(b),(c)等所示。



表上作业法

从每一空格出发一定存在和可以找到唯一的闭回路

。

闭回路法计算检验数的经济解释为：在已给出初始解的表中，　可从**任一空格**出发，如(A_1, B_1)，若让A_1的产品调运1吨给B_1。为了保持产销平衡，就要依次作调整：在(A_1, B_3)处减少1吨，(A_2, B_3)处增加1吨，(A_2, B_1)处减少1吨，即构成了以(A_1, B_1)空格为起点，其他为数字格的闭回路。

表上作业法

如表中的虚线所示。在这表中闭回路各顶点所在格的右上角数字是单位运价。

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3 (+1)	11	3 4(−1)	10 3	7
A_2	1 3(−1)	9	2 1(+1)	8	4
A_3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

表上作业法

可以证明，如果对闭回路的方向不加区别（即只要起点及其他所有顶点完全相同，而不区别行进方向），那么以每一个非基量为起始顶点的闭回路就存在而且唯一。因此，对每一个非基变量可以找到而且只能找到唯一的一个闭回路。

表上作业法

可见这调整的方案使运费增加

$(+1)\times 3+(-1)\times 3+(+1)\times 2+(-1)\times 1=1$(元)

这表明若这样调整运量将增加运费。将“1”这个数填入(A1，B1)格，这就是检验数。

按以上所述，可找出所有空格的检验数，

表上作业法

这样，利用单位产品变化（运输的单位费用）可计算出它们对目标函数的综合影响，其作用与线性规划单纯形方法中的检验数完全相同。故也称这个综合影响为该非基变量对应的检验数。

空格	闭 回 路	检验数
(11)	(11)-(13)-(23)-(21)-(11)	1
(12)	(12)-(14)-(34)-(32)-(12)	2
(22)	(22)-(23)-(13)-(14)-(34)-(32)-(22)	1
(24)	(24)-(23)-(13)-(14)-(24)	-1
(31)	(31)-(34)-(14)-(13)-(23)-(21)-(31)	10
(33)	(33)-(34)-(14)-(13)-(33)	12

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

如果规定作为起始顶点的非基变量为第 1 个顶点，闭回路的其他顶点依次为第 2 个顶点、第 3 个顶点……，那么就有

σ_{ij} =（闭回路上的奇数次顶点单位运费之和）－（闭回路上的偶数次顶点单位运费之和）

其中 ij 为非基变量的下角标。

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3 [1]	11 [2]	3 4	10 3	7
A_2	1 3	9 [1]	2 1	8 [-1]	4
A_3	7 [10]	4 6	10 [12]	5 3	9
销量	3	6	5	6	20(产销平衡)

当检验数还存在负数时，说明运输费用还有降低的空间，原方案不是最优解，要**继续改进**。

显然，当所有非基变量的检验数均大于或等于零时，调运方案就是最优方案，因为此时对现行方案作任何调整都将导致总的运输费用增加。

闭回路法的主要缺点是：当变量个数较多时，寻找闭回路以及计算两方面都会产生困难。

2. 位势法

根据单纯形法中检验数的定义，可以从约束条件中解出基变量（用非基变量表示基变量），然后代入目标函数消去目标中的基变量，得到的非基变量系数就是检验数。这一过程可以用下列位势法等价地加以实现。

位势：设对应基变量x_{ij} 的 $m+n-1$ 个 ij，存在 u_i，v_j 满足

$$u_i+v_j=c_{ij}，\quad i=1,2\cdots,m；\ j=1,2\cdots,n.$$

称这些 u_i，v_j 为该基本可行解对应的位势。

2. 位势法

由于有$m+n$个变量（u_i，v_j），

$m+n-1$个方程（基变量个数），

故有一个自由变量，位势不唯一。

利用位势求检验数：

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$$

$$i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,n$$

2. 位势法

在例1的由最小元素法得到的初始解中x_{23}，x_{34}，x_{21}，x_{32}，x_{13}，x_{14}是基变量。令$u_1=0$

x_{23}	$c_{23}-(u_2+v_3)=0$	即$2-(u_2+v_3)=0$
x_{34}	$c_{34}-(u_3+v_4)=0$	$5-(u_3+v_4)=0$
x_{21}	$c_{21}-(u_2+v_1)=0$	$1-(u_2+v_1)=0$
x_{32}	$c_{32}-(u_3+v_2)=0$	$4-(u_3+v_2)=0$
x_{13}	$c_{13}-(u_1+v_3)=0$	$3-(u_1+v_3)=0$
x_{14}	$c_{14}-(u_1+v_4)=0$	$10-(u_1+v_4)=0$

从以上7个方程中，由$u_1=0$可求得

$u_2=-1$, $u_3=-5$, $v_1=2$, $v_2=9$, $v_3=3$, $v_4=10$

2. 位势法

将计算所得的位势值填入表格

利用位势求检验数：$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	$\boxed{3}$ 1=3-(0+2)	$\boxed{11}$ 2=11-(0+9)	$\boxed{3}$ 0=3-(0+3)	$\boxed{10}$ 0=10-(0+10)	0
A_2	$\boxed{1}$ 0=1-(-1+2)	$\boxed{9}$ 1=9-(-1+9)	$\boxed{2}$ 0=2-(-1+3)	$\boxed{8}$ -1=8-(-1+10)	-1
A_3	$\boxed{7}$ 10=7-(-5+2)	$\boxed{4}$ 0=4-(-5+9)	$\boxed{10}$ 12=10-(-5+3)	$\boxed{5}$ 0=5-(-5+10)	-5
v_j	2	9	3	10	

2. 位势法

还有负检验数。说明未得最优解，还可以改进。

利用位势求检验数主要应用的就是：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n$$