



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

对偶理论

对偶的经济解释

主讲：陈慧青



对偶的经济解释

原问题与对偶问题的解之间的对应关系时指出：在单纯形表中进行迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而在**检验数行得到的是对偶问题的基解。**

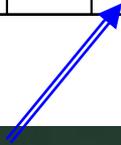
通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，根据对偶性质可知，已得到最优解。即原问题与对偶问题都是最优解。

对偶的经济解释

以例1模型为例，按照对偶性质初始表中

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	8	1	2	1	0	0	$8/2=4$
0	x_4	16	4	0	0	1	0	-
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	$12/4=3$
-z		0	2	3	0	0	0	

y_i^*



对偶的经济解释

迭代后单纯形表中

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	8	1	2	1	0	0	$8/2=4$
0	x_4	16	4	0	0	1	0	-
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	$12/4=3$
-z		0	2	3	0	0	0	

y_i^*

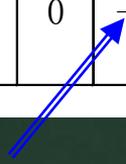


对偶的经济解释

迭代后最终单纯形表中

$C_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	
-z		-14	0	0	-3/2	-1/8	0	

y_i^*



对偶的经济解释

对偶概念的引入和对偶理论的建立，使线性规划不仅成为优化的工具，而且赋予线性规划理论和算法以明确的经济意义，从而使线性规划成为对企业经济活动进行经济分析的重要工具。

企业经济活动就其目标分析，可以归纳为“**最小成本**”和“**最大利润**”两大类。最小成本问题是要在完成一定的任务的前提下，合理安排各项活动，使从事各项活动的总成本最小；最大利润问题是要在各种资源限制的范围以内，合理计划各种产品的产量，使各种产品的总利润最大。

对偶的经济解释

在这一节中，我们仅对最大利润问题进行分析，最小成本问题的分析是类似的。

在单纯形法的每步迭代中，目标函数取值 $z=C_B B^{-1}b$ 和检验数 $C_N - C_B B^{-1}N$ 中都有乘子 $Y=C_B B^{-1}$ ，那么 Y 的经济意义是什么？

设 B 是 $\{\max z=CX \mid AX \leq b, X \geq 0\}$ 的最优基，由 $-Yb = -C_B B^{-1}b$ 式可知

$$z^* = C_B B^{-1}b = Y^*b。$$

对 z 求偏导数，得

$$\frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$



对偶的经济解释

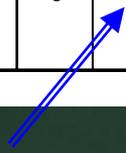
由上式可知，变量 y_i^* 的经济意义是在其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

由此可知，对偶问题最优解中对偶变量 y_i^0 ($i=1, 2, \dots, m$) 的值就是相应设备的能力对总利润的边际贡献。 y_i^0 也称为相应设备能力约束的**影子价格**， y_i^0 越大，表明相应的设备能力增加一个单位，引起总利润的增加越大，也就是说，相对于最优生产计划来说，这种设备能力比较**紧缺**； y_i^0 较小，表明设备能力相对**不紧缺**； $y_i^0=0$ ，说明在最优生产计划下第 i 种设备能力**有剩余**。

对偶的经济解释

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	X_4	x_5	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	
-z		-14	0	0	-3/2	-1/8	0	

y_i^*




对偶的经济解释

$$y_1^*=1.5, y_2^*=0.125, y_3^*=0。$$

这说明在其他条件不变的情况下，若设备增加一台时，该厂按最优计划安排生产可多获利1.5元；原材料A增加1kg，可多获利0.125元；原材料B增加1kg，对获利无影响。

y_i^* 的值代表对第*i*种资源的估价—影子价格

对偶的经济解释

影子价格随具体情况而异，在**完全市场经济的条件下**，当某种资源的市场价低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大生产；而当某种资源的市场价高于企业影子价格时，则企业的决策者应把已有资源卖掉。可见影子价格对市场有调节作用。

影子价格反映了不同的局部或个体的增量可以获得不同的整体经济效益。如果为了扩大生产能力，考虑增加设备，就应该从影子价格高的设备入手。这样可以用较少的局部努力，获得较大的整体效益。

对偶的经济解释

注意：影子价格表明资源增加对总效益产生的影响。

这是指资源在一定范围内增加时的情况，当某种资源的增加超过了这个“**一定的范围**”时，总利润的增加量则不是按照影子价格给出的数值线性地增加。