石家莊鐵道大學

SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

对偶理论

对偶性质（二）

主讲 ：陈慧青

(4) 可行解是最优解时的性质

设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，

则当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解。

设：$\hat{X}$是原问题的可行解，$\hat{Y}$是对偶问题的可行解

当$C\hat{X}=\hat{Y}b$时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解.

证：若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据性质2可知，对偶问题的

所有可行解$\bar{Y}$都存在$\bar{Y}b\geq C\hat{X}$;因$C\hat{X}=\hat{Y}b$,

所以$\bar{Y}b\geq\hat{Y}b$.可见是使目标函数取值最小的可行解，

因而是最优解.

同理可证明，对原问题的所有可行解$\bar{X}$,

存在$C\hat{X}=\hat{Y}b\geq C\bar{X}$,所以是最优解.　证毕。

（5）对偶定理

若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

若$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，使得$\omega = \hat{Y}b = C_B B^{-1} b$

因原问题的$\hat{X}$是最优解，使目标函数取值$z = C\hat{X} = C_B B^{-1} b$

由此，得到$\hat{Y}b = C_B B^{-1} b = C\hat{X}$

可见$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

(6) 互补松弛性

若$\hat{X},\hat{Y}$分别为原问题和对偶问题的可行解，

那么$\hat{Y}X_S=0$和$Y_S\hat{X}=0$;当且仅当，$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

证：设原问题和对偶问题的标准关系是

原问题	对偶问题
$\max z = CX$	$\min \omega = Yb$
$AX + X_S = b$	$YA - Y_S = C$
$X, X_S \geq 0$	$Y, Y_S \geq 0$

（6）互补松弛性

将原问题目标函数中的系数向量C用$C=YA-Y_S$代替后，得到

$$z=(YA-Y_S)X=YAX-Y_SX$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量b，用$b=AX+X_S$代替后，得到

$$\omega=Y(AX+X_S)=YAX+YX_S$$

(6) 互补松弛性

- 若$Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$; 则$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$,

  由性质（4），可知$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

- 又若分别是原问题和对偶问题的最优解，

  根据性质（5），则有$CX=YAX=Yb$

  由上式可知，必有

  $$\hat{Y}X_S=0, Y_S\hat{X}=0$$

对偶性质7

（7） 原问题检验数与对偶问题解的关系

设原问题是

$$\max\ z=CX;\ AX+X_S=b;\ X, X_S\geq 0$$

它的对偶问题是

$$\min\ \omega=Yb;\ YA-Y_S=C;\ Y, Y_S\geq 0$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解。

对偶性质例题1

已知线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + x_2 \\
-x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1 \\
x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

解：先将其变换为对偶问题。

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

对偶问题

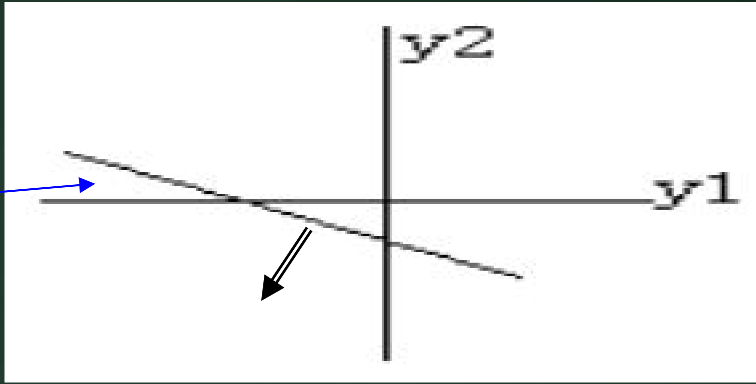
$\min \omega = 2y_1 + y_2$

$-y_1 - 2y_2 \geqslant 1$

$y_1 + y_2 \geqslant 1$

$y_1 - y_2 \geqslant 0$

$y_1, y_2 \geqslant 0$



由第1约束条件，可知对偶问题无可行解；原问题虽然有可行解，但最优解。

对偶性质例题2

线性规划问题

$$\min \ \omega=2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 \geqslant 4$$

$$2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5 \geqslant 3$$

$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$$

已知其对偶问题的最优解为$y_1^*=4/5$，$y_2^*=3/5$；$z=5$。试用对偶理论找出原问题的最优解 。

解：先写出它的对偶问题

$$\max\ z=4y_1+3y_2$$

$y_1+2y_2 \leqslant 2$ ①

$y_1-y_2 \leqslant 3$ ②

$2y_1+3y_2 \leqslant 5$ ③

$y_1+y_2 \leqslant 2$ ④

$3y_1+y_2 \leqslant 3$ ⑤

$y_1,\ y_2 \geqslant 0$

将$y_1^*=4/5$, $y_2^*=3/5$的值代入约束条件，

得②$=1/5<3$，③$=17/5<5$，④$=7/5<2$

它们为严格不等式；

由互补松弛性得 $x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$。

因y_1，$y_2>0$；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$x_1^*+3x_5^*=4$，$2x_1^*+x_5^*=3$

求解后得到$x_1^*=1$, $x_5^*=1$；故原问题的最优解为 $X^*=(1, 0, 0, 0, 1)^T$。