石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

对偶理论

对偶性质（一）

主讲 ：陈慧青

目录

对偶规则

石家莊鐵道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY 网络精品课程

对称形式的原问题和对偶问题

$$\min \ \omega = Yb$$

$$YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

为原线性规划问题$\{\max \ z = CX \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$的对偶规划问题

原问题和对偶问题满足的共同规律

1. 原问题和对偶问题的优化方向相反；

2. 原问题的价值系数就是对偶问题右端常数项，原问题右端常数项就是对偶问题价值系数；

3. 原问题和对偶问题系数矩阵互为转置；

4. 原问题的变量个数等于对偶问题条件个数，原问题条件个数等于对偶问题变量个数。

对称形式的原问题和对偶问题

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

x_j / y_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原关系	$\min\omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq$	b_m
对偶关系	$\geq$	$\geq$	$\cdots$	$\geq$		
maxz	c_1	c_2	$\cdots$	c_{mn}	maxz $=$	$min\ \omega$

对偶问题

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

变换关系为对称形式

原问题 （LP） $\longrightarrow$ 对偶问题(DP)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

	原问题	对偶问题	
	目标函数 max z	目标函数 min ω	
变量	n 个	n 个	约束条件
	≥ 0	$\geq$	
	≤ 0	$\leq$	
	无约束	$=$	
约束条件	m 个	m 个	变量
	$\leq$	≥ 0	
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	无约束	

约束条件 RHS $\Rightarrow$ 目标函数变量的系数

目标函数变量系数 $\Rightarrow$ 约束条件的 RHS

求下述线性规划原问题的对偶问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 & (1) \Rightarrow y_1 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 & (2) \Rightarrow y_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 & (3) \Rightarrow y_3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4\text{无约束} \end{cases}$$

按照对偶规则写出对偶问题为：

$$\max z' = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

对偶性质

（1） 对称性　对偶问题的对偶是原问题 ；
(2)弱对偶性　若X是原问题的可行解，Y是对偶问题的可行解。则存在CX≤Yb;
(3） 无界性　若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解;
(4） 可行解是最优解时的性质 ；
(5） 对偶定理　若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等;
(6） 互补松弛性 ；
(7） 原问题检验数与对偶问题解的关系.

(1) 对称性 对偶问题的对偶是原问题

证设原问题是

$\max\ z=CX;\ AX\leqslant b;\ \ X\geqslant 0$

根据对偶问题的对称变换关系，可以找到它的对偶问题是 $\min\ \omega=Yb;\ YA\geqslant C;\ \ Y\geqslant 0$

若将上式两边取负号，又因 $\min\ \omega=\max(-\omega)$ 可得到

$\max(-\omega)=-Yb;\ -YA\leqslant -C;\ \ Y\geqslant 0$

根据对称变换关系，得到上式的对偶问题是

$\min(-\omega')=-CX;\ \ -AX\geqslant -b;\ X\geqslant 0$

又因 $\min(-\omega')=\max\omega'$

可得 $\max\omega'=\max\ z=CX;\ \ AX\leqslant b;\ X\geqslant 0$

这就是原问题。证毕。

(2) 弱对偶性

若$\overline{X}$是原问题的可行解， $\overline{Y}$是对偶问题的可行解

则存在 $C\overline{X} \le \overline{Y}b$

设原问题是 $\max z = CX;\ AX \le b;\ X \ge 0$

因$\overline{X}$是原问题的可行解，所以满足约束条件，即

$$A\overline{X} \le b$$

若$\overline{Y}$是对偶问题的可行解，将$\overline{Y}$左乘上式，得到

$$\overline{Y}A\overline{X} \le \overline{Y}b$$

原问题的对偶问题是：$\min \omega = Yb;\ YA \ge C;\ Y \ge 0$

因$\overline{Y}$是对偶问题的可行解，所以满足 $\overline{Y}A \ge C$

将$\overline{X}$右乘上式，得到 $\overline{Y}A\overline{X} \ge C\overline{X}$.

于是得到 $C\overline{X} \le \overline{Y}A\overline{X} \le \overline{Y}b$ 证毕.

(3) 无界性　若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解

证明：由性质（2）可知，

$$\bar{Y}b \geq C\bar{X} \to \infty,$$是不可能成立。

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

(3) 无界性举例

$LP:$

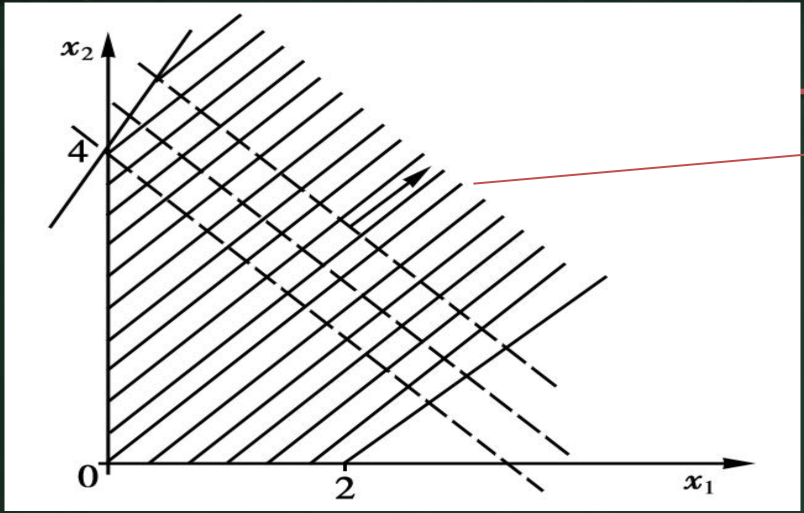
$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

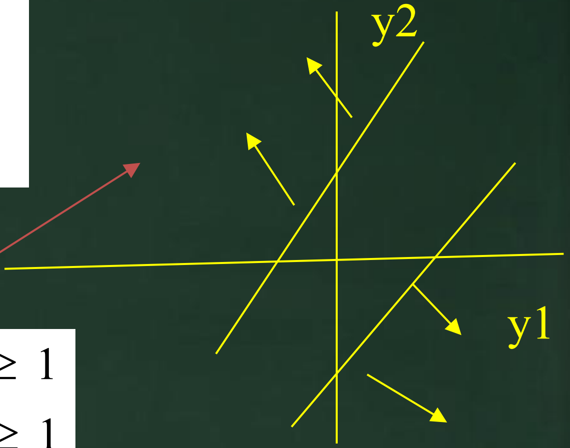
$DP:$

$$\min\ \omega = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



从两图对比可明显看到原问题无界，其对偶问题无可行解

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$