石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

对偶理论

对偶问题提出

主讲 ：陈慧青

目录

单纯形法的矩阵描述

对偶问题的提出

单纯形法的矩阵描述

设线性规划问题 ：

目标函数 $\max\ z=CX$;

约束条件 $AX\leqslant b$;

非负条件 $X\geqslant 0$

单纯形法的矩阵描述

给这线性规划问题的约约束条件加入松弛变量以后，得到标准型：

$$\max\ z = CX + 0X_s;$$

$$AX + IX_s = b;$$

$$X,\ X_s \geqslant 0$$

这里 I 是m×m单位矩阵。

单纯形法的矩阵描述

这是将系数矩阵（A，I）分为（B，N）两块。

B是基变量的系数矩阵，

N是非基变量的系数矩阵。

决策变量分为：

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

将目标函数的系数C分为C_B，C_N

分别对应于基变量X_B和非基变量X_N。

并且记作C=（C_B，C_N）。

单纯形法的矩阵描述

线性规划问题可表示为：

目标函数 $\max z = C_B X_B + C_N X_N$

$$= C_B X_B + C_N X_N \quad (3-1)$$

约束条件 $BX_B + NX_N = BX_B + NX_N = b \quad (3-2)$

非负条件 $X_B, X_N \geq 0 \quad (3-3)$

单纯形法的矩阵描述

将（3-2）式移项及整理后：

$$BX_B = b - NX_N;$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N;$$

目标函数：

$$z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

单纯形法的矩阵描述

令非基变量=0；由上式得到：

基可行解 $X^{(1)}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix};$

目标函数的值 $z=C_B B^{-1}b$

单纯形法的矩阵描述

$(C_N - C_B B^{-1} N)$

对 应 已 用 的 检 验 数 符 号

$c_j - z_j (j = 1, 2, \cdots, n)$

检 验 数 也 可 表 示 为 ：

$C - C_B B^{-1} A$ 与 $-C_B B^{-1}$

对偶问题

对偶是什么：对同一事物（或问题），从不同的角度（或立场）提出对立的两种不同的表述。

例如：

在平面内，矩形的面积与其周长之间的关系，有两种不同的表述方法。

（1）周长一定，面积最大的矩形是正方形。

（2）面积一定，周长最短的矩形是正方形。

对偶问题

第1章例1的不同表述

现从另一角度来讨论这个问题。

假设该工厂的决策者决定不生产产品Ⅰ、Ⅱ，而将其所有资源出租或外售。这时工厂的决策者就要考虑给每种资源如何定价的问题。设用y_1，y_2，y_3分别表示出租单位设备台时的租金和出让单位原材料A，B的附加额。

对偶问题

他在做定价决策时，做如下比较：若用1个单位设备台时和4个单位原材料A可以生产一件产品Ⅰ，可获利2元，那么生产每件产品Ⅰ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅰ的利润，这就有

$y_1+4y_2\geqslant 2$

同理将生产每件产品Ⅱ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅱ的利润，这就有$2y_1+4y_3\geqslant 3$

对偶问题

把工厂所有设备台时和资源都出租或出让，其收入为

$$\omega=8y_1+16y_2+12y_3$$

从工厂的决策者来看当然ω愈大愈好；但受到接受方的制约，从接受者来看他的支付愈少愈好，所以工厂的决策者只能在满足大于等于所有产品的利润条件下，提出一个尽可能低的出租或出让价格。

对偶问题

$$\min \ \omega=8y_1+16y_2+12y_3$$

$$y_1+4y_2 \geqslant 2$$

$$2y_1+4y_3 \geqslant 3$$

$$y_i \geqslant 0,\ i=1,2,3 \quad (2\text{-}8)$$

称这个线性规划问题为例1线性规划问题(这里称原问题)的对偶问题。

对偶问题

从这里可以得到另一个线性规划问题

$$\min\ \omega = Yb$$
$$YA \geq C$$
$$Y \geq 0$$

称它为原线性规划问题 $\{\max\ z = CX \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$ 的对偶规划问题

对偶问题

目标函数：

$$min \quad \omega = Y(8,16,12)^T \Rightarrow min \quad \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

约束条件：

$$\begin{cases} Y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \geq (2,3) \\ \\ Y \geq 0 \\ Y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq o \end{cases}$$

对偶问题

变换关系为对称形式

原问题 （LP） ⟹ 对偶问题(DP)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad \min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \qquad\quad \ge 2 \\ 2y_1 \qquad\quad + y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$