线性规划与单纯形法

单纯形法（一）

主讲 ：陈慧青

目录

解的概念

1.可行解
2.基
3.基解
4.基可行解
5.可行基

可行解

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2-4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \cdots m & (2-5) \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n & (2-6) \end{cases}$$

满足约束条件(2-5)，(2-6)式的解X=(x_1, x_2，···，x_n)^T，称为线性规划问题的**可行解**，其中使目标函数达到最大值的可行解称为**最优解**。

基，基变量

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

B是系数矩阵A中的$m \times m$阶非奇异子矩阵$\left(|B| \neq 0\right)$

称B为线性规划问题的基。

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \left(P_1, P_2, \cdots P_m\right)$$

$P_j (j = 1,2,\cdots m)$为基向量，

$x_j (j = 1,2,\cdots m)$为基变量。

基解和基可行解

对应于某一个基矩阵的解称为基本解，简称为基解。

基解不一定是可行解。

满足非负条件（2-6）的基解，称为基可行解。 基可行解的非零分量的数目也不大于m，并且都是非负的。

例 考虑问题：

$$\min \quad z = x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0;\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基阵为

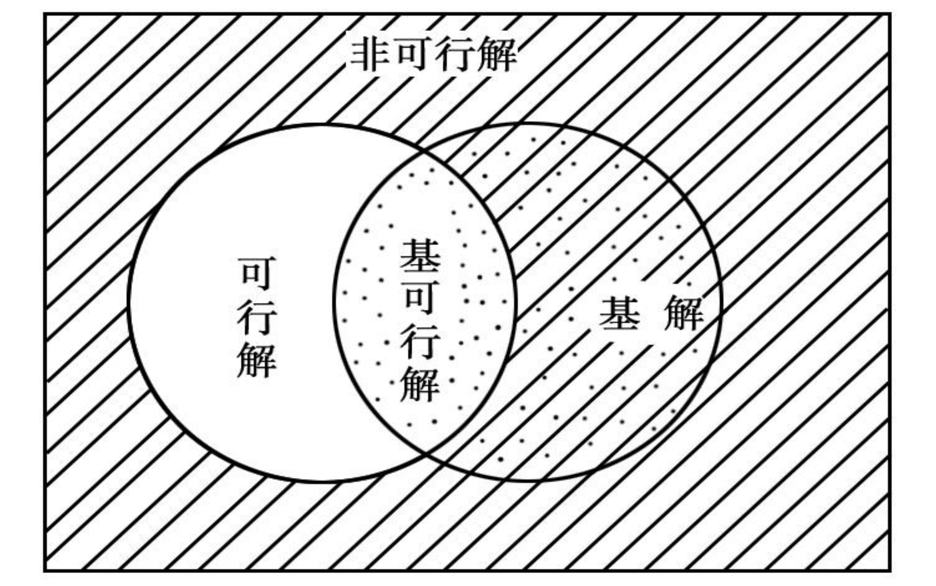
$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应的基解分别为 $x^1 = (0,0,2,2,5)^T$ 和 $x^2 = (-1,0,0,3,6)^T$，其中 x^1 为基本可行解， x^2 不是基本可行解。

可行基

对应于基可行解的基，称为可行基。

图2-7 它们之间的关系



单纯形法的解题思路

一般线性规划问题具有线性方程组的变量数大于方程个数，这时有不定的解。但可以从线性方程组中找出一个个的单纯形，每一个单纯形可以求得一组解，然后再判断该解使目标函数值是增大还是变小，决定下一步选择的单纯形。这就是迭代，直到目标函数实现最大值或最小值为止。这样问题就得到了最优解，先举一例来说明。

单纯形法

例1来讨论如何用单纯形法求解。例1的标准型为：

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\
4x_1 + x_4 = 16 \\
4x_2 + x_5 = 12 \\
x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5
\end{cases}
\qquad (2-12)
$$

单纯形法的代数原理

约束方程(2-12)式的系数矩阵

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

从(2-12)式中可以看到x_3, x_4, x_5的系数列向量

单纯形法的代数原理

P_3 , P_4, P_5是线性独立的，这些向量构成一个基

对应于B的变量x_3, x_4, x_5为 基变量.

$$B=\left(P_3,P_4,P_5\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= 8 \\ 4x_1+x_4 &= 16 \\ 4x_2+x_5 &= 12 \end{cases} \quad (2-12)$$

单纯形法的代数原理

由（2-12）移项等价变形为：

$$\begin{cases} x_3 = \quad 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \qquad\quad - 4x_2 \end{cases} \qquad (2-13)$$

将(2-13)式代入目标函数(2-11)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 (2-11)$$

单纯形法的代数原理

得到

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \qquad (2-14)$$

当令非基变量$x_1=x_2=0$，便得到$z=0$。这时得到一个基可行解$X^{(0)}$

$$X^{(0)}=(0, 0, 8, 16, 12)^T$$

这个基可行解表示：工厂没有安排生产产品Ⅰ、Ⅱ；资源都没有被利用，所以工厂的利润指标$z=0$。

单纯形法的代数原理

从分析目标函数的表达式(2-14)可以看到非基变量x_1, x_2(即没有安排生产产品Ⅰ，Ⅱ)的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大。从经济意义上讲，安排生产产品Ⅰ或Ⅱ，就可以使工厂的利润指标增加。所以只要在目标函数(2-14)的表达式中还存在有正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换。

单纯形法的代数原理

如何确定换入，换出变量

一般选择**正系数最大**的那个非基变量x_2为换入变量，将它换入到基变量中去，同时还要确定基变量中有一个要换出来成为非基变量，可按以下方法来确定换出变量。

现分析(2-13)式，当将x_2定为换入变量后，必须从x_3, x_4, x_5中确定一个换出变量，并保证其余的都是非负，即$x_3, x_4, x_5 \geq 0$。

单纯形法的代数原理

当 $x_1=0$，由（2-13）式得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \quad (2-13)$$

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 \geq 0 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

单纯形法的代数原理

x_2取何值时，才能满足非负要求

从(2-15)式中可以看出，只有选择

x_2=min(8/2,-,12/4)=3时，才能使(2-15)式成立。因当x_2=3时，基变量x_5=0，这就决定用x_2去替换x_5。

以上数学描述说明了每生产一件产品Ⅱ，需要用掉各种资源数为(2，0，4)。由这些资源中的薄弱环节，就确定了产品Ⅱ的产量。

这里就是由原材料B的数量确定了产品Ⅱ的产量x_2=12/4=3件。

为了求得以x_3, x_4, x_2为基变量的一个基可行解和进一步分析问题，需将(1-13)中x_2的位置与x_5的位置对换。得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \qquad\quad - 4x_2 \end{cases} \qquad (2-13)$$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 & (1) \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2) \\ 4x_2 = 12 - x_5 & (3) \end{cases} \qquad (2-16)$$

单纯形法的代数原理

用高斯消去法将(2-16)式中x_2的系数列向量变换为单位列向量。其运算步骤是：

③′=③/4；①′=①-2×③′；②′=②，

并将结果仍按原顺序排列有：

$$
\begin{cases}
x_3 = 2 - x_1 + \dfrac{1}{2}x_5 & (1)' \\
x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\
x_2 = 3 - \dfrac{1}{4}x_5 & (3)'
\end{cases}
\qquad (2-17)
$$

单纯形法的代数原理

再将(2-17)式代入目标函数(2-11)式得到

$$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 \qquad (2-18)$$

令非基变量 $x_1=x_5=0$，得到 $z=9$，并得到另一个基可行解 $X^{(1)}$

$$X^{(1)}=(0, 3, 2, 16, 0)^T$$

从目标函数的表达式(2-18)中可以看到，非基变量 x_1 的系数是正的，说明目标函数值还可以增大，$X^{(1)}$ 还不是最优解。

单纯形法的代数原理

于是再用上述方法，确定换入、换出变量，继续迭代，再得到另一个基可行解$X^{(2)}$

$$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^T$$

再经过一次迭代，再得到一个基可行解$X^{(3)}$

$$X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^T$$

而这时得到目标函数的表达式是：

$$z=14-1.5x_3-0.125x_4 \qquad (2-19)$$

单纯形法的代数原理

再检查(2-19)式，可见到所有非基变量x_3, x_4的系数都是负数。这说明若要用剩余资源x_3, x_4，就必须支付附加费用。

所以当$x_3=x_4=0$时，即不再利用这些资源时，目标函数达到最大值。所以$X^{(3)}$是最优解。即当产品Ⅰ生产4件，产品Ⅱ生产2件，工厂才能得到最大利润。