石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

线性规划与单纯形法

图解法与标准型

主讲 ：陈慧青

图解法

线性规划的图解法(解的几何表示)对于只有两个变量的线性规划问题，可以二维直角坐标平面上作图表示线性规划问题的有关概念，并求解。图解法求解线性规划问题的步骤如下：

(1) 分别取决策变量 x_1 , x_2 为坐标向量建立直角坐标系。

图解法

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY 网络精品课程

（2）对每个约束（包括非负约束）条件，先取其等式在坐标系中作出直线，通过判断确定不等式所决定的半平面。各约束半平面交出来的区域(存在或不存在)，若存在，其中的点表示的解称为此线性规划的可行解。这些符合约束限制的点集合，称为可行集或可行域。然后进行（3）。否则该线性规划问题无可行解。

图解法

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

（3）任意给定目标函数一个值作一条目标函数的等值线，并确定该等值线平移后值增加的方向，平移此目标函数的等值线，使其达到既与可行域有交点又不可能使值再增加的位置（有时交于无穷远处，此时称无有限最优解）。若有交点时，此目标函数等值线与可行域的交点即最优解（一个或多个），此目标函数的值即最优值。

图解法

例1是二维空间（平面）线性规划问题，可用作图法直观地来表述它的求解。

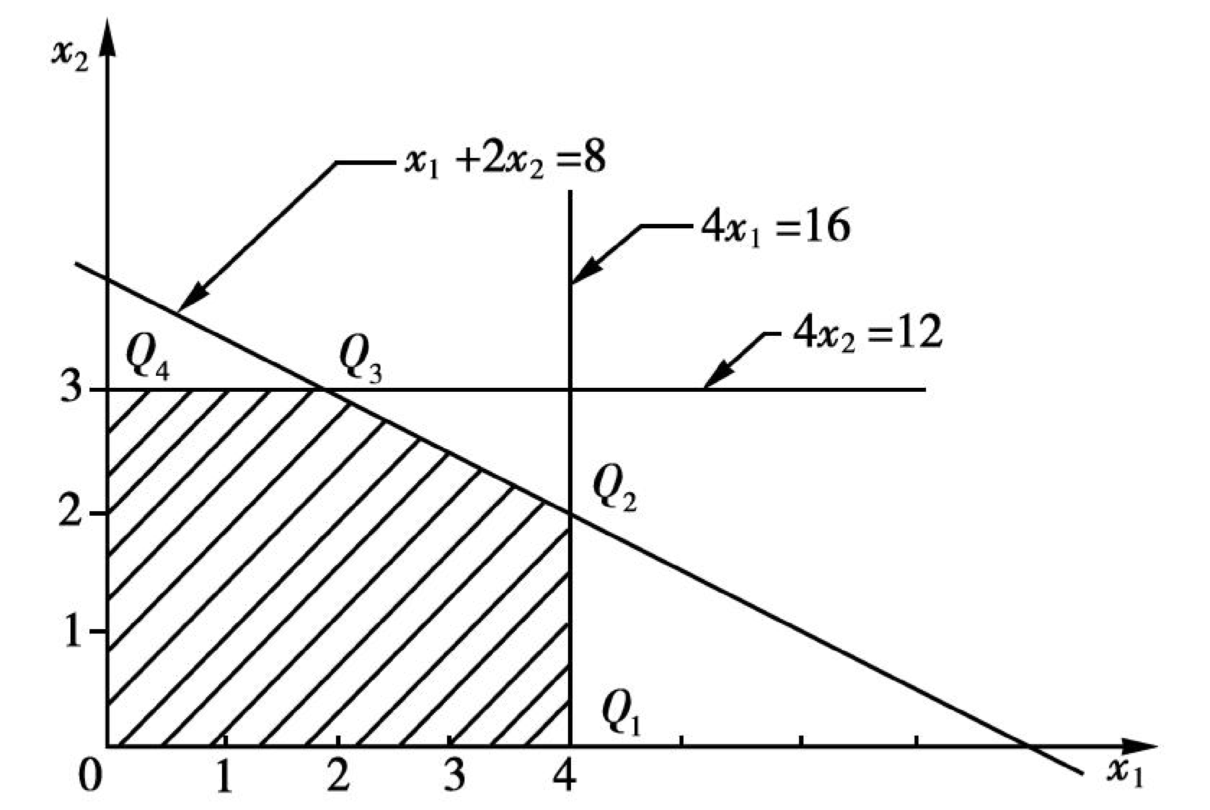
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

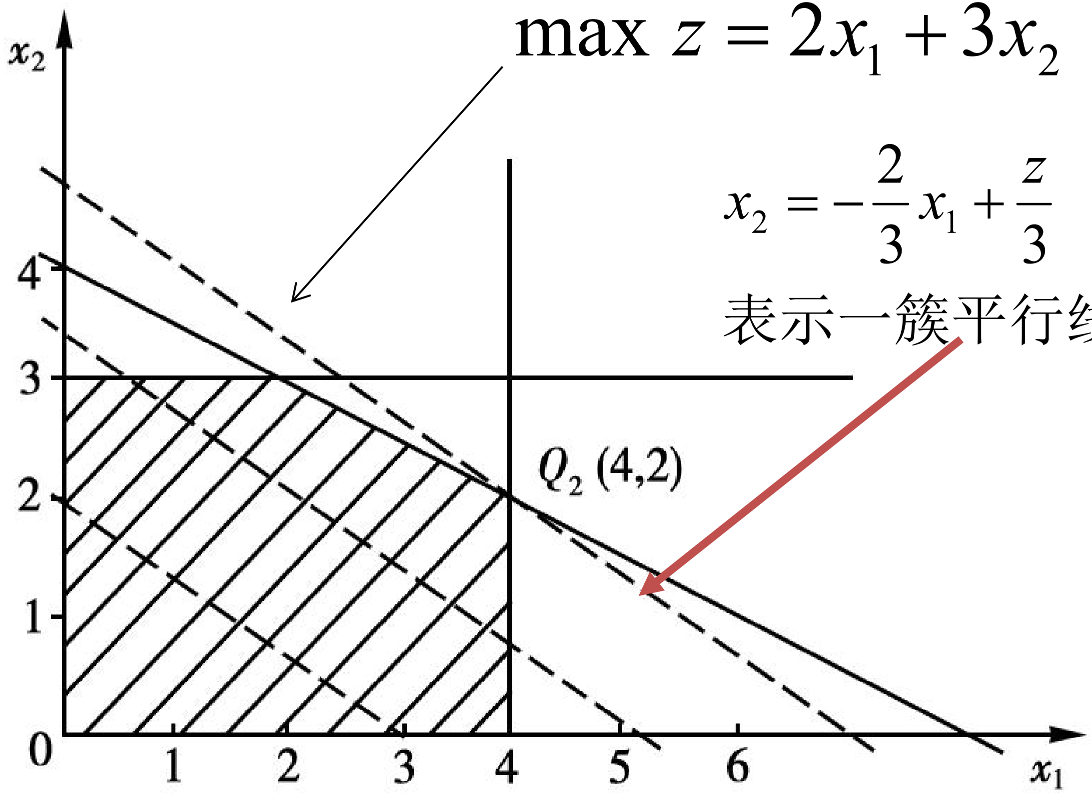
因存在 $x_1, x_2 \ge 0$

必须在直角坐标的第1象限内作图，求解。

例1 生产计划问题



图解法



$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$$

表示一簇平行线

目标值在（4，2）点，达到最大值14

这个模型取得唯一最优解。

可能出现的几种情况

（1）无穷多最优解(多重最优解)见图2-4

（2）无界解，见图2-5

（3）无可行解，见图2-6

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

图2-4　无穷多最优解(多重最优解)

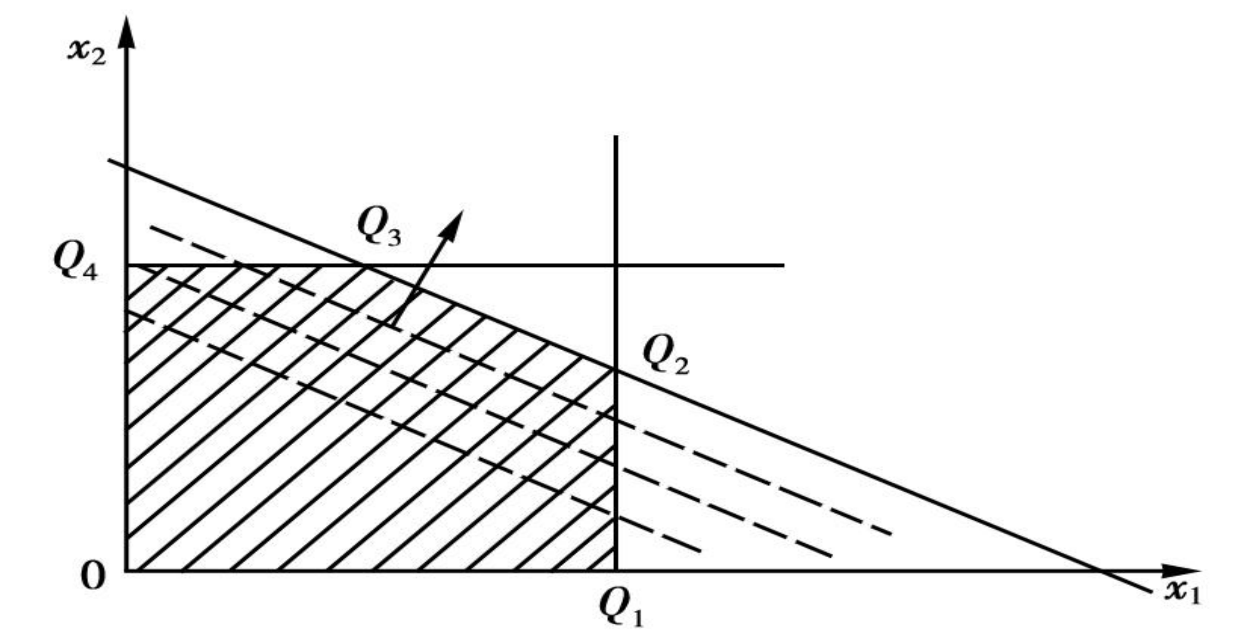


图2-5 无界解

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge o \end{cases}$$

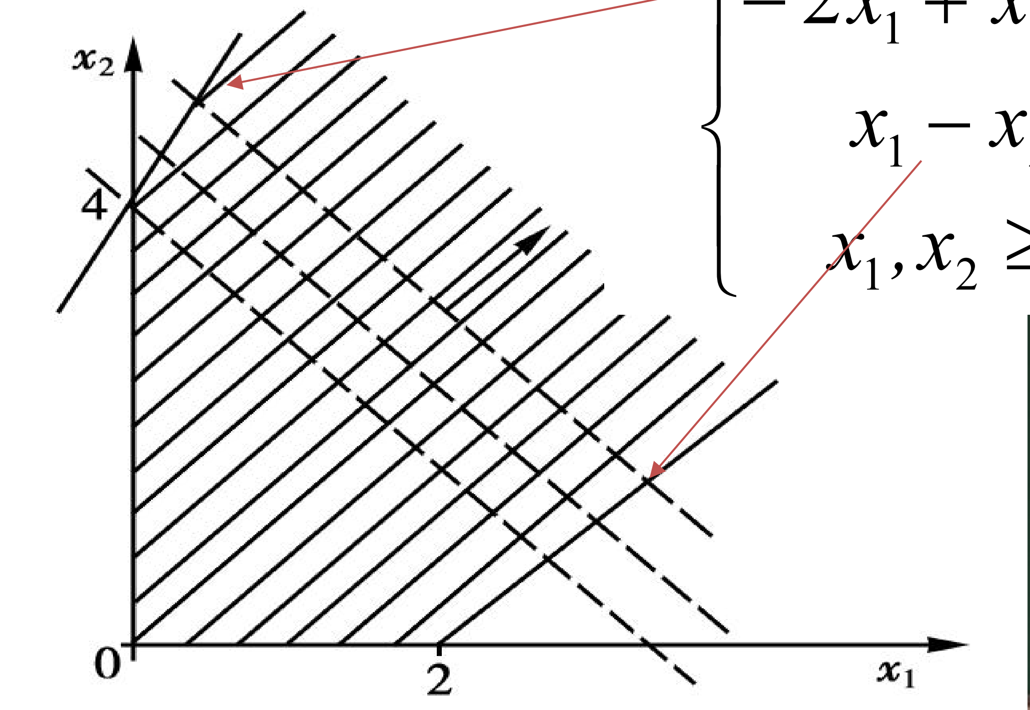
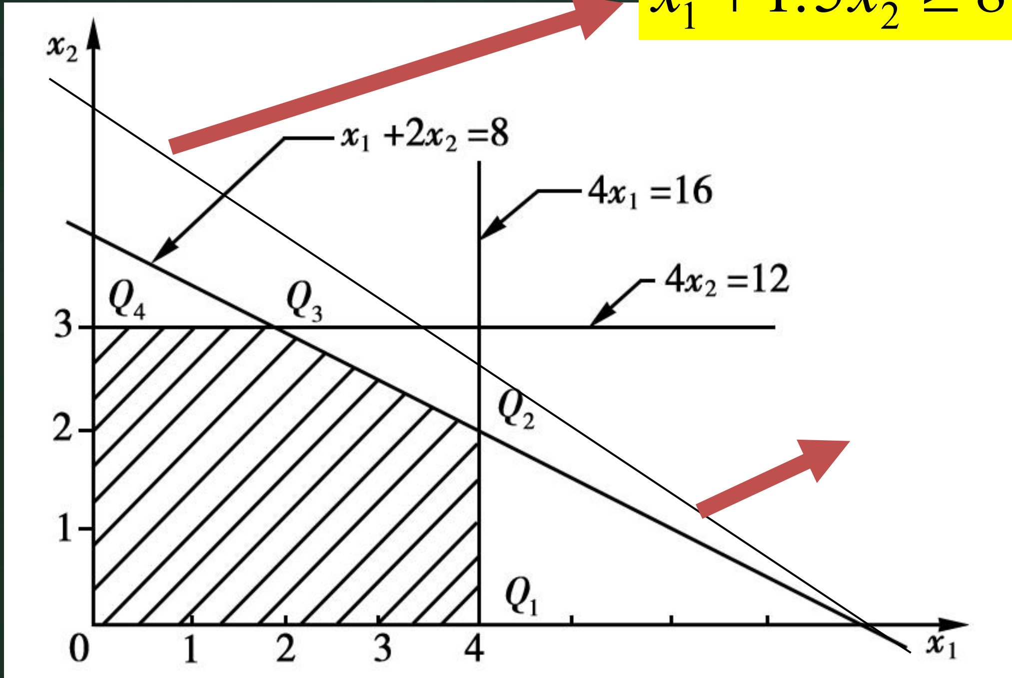


图2-6 不存在可行域

无可行解

增加的约束条件

$$x_1+1.5x_2\geq 8$$



图解法的结论

（1）若线性规划问题存在可行域，则可行域为凸集。

（2）若线性规划问题存在可行域，则可行域顶点个数一定为有限个，至多有 C_n^m 个。

（3）若线性规划问题存在最优解，则最优解一定在可行域的顶点或边界上得到。

当出现无界解或无可行解时，需要开始循环过程，审视建模过程或求解方法。

标准型

模型标准型式的条件：

目标函数极大化
约束条件为等式
决策变量非负
右端常数项非负

标准型的代数写法

M_1：

目标函数：$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

标准型的向量式写法

M_1'' :目标函数： $\max \quad z = CX$

约束条件：$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n);$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; j = 1,2,\cdots n$$

标准型的矩阵式

M_1'' :目标函数： $\max \quad z = CX$

约束条件：$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$

系数矩阵： $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots P_n)$;

零向量：$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$； 资源向量： $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$

决策变量向量： $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

如何变换为标准型：

（1） 若要求目标函数实现最小化，即min z=CX。这时只需将目标函数最小化变换求目标函数最大化，即令z′ = -z，于是得到max z′ = -CX。这就同标准型的目标函数的形式一致了。

（2） 约束方程为不等式。这里有两种情况：一种是约束方程为“≤”不等式，则可在“≤”不等式的左端加入非负松弛变量，把原“≤”不等式变为等式；另一种是约束方程为“≥”不等式，则可在“≥”不等式的左端减去一个非负剩余变量（也可称松弛变量），把不等式约束条件变为等式约束条件。下面举例说明。

例8　将例1的数学模型化为标准型。

例1的数学模型,加**松弛变量**后

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

(3) 若存在取值无约束的变量x_k, 可令,

$$x_k = x_k^{'} - x_k^{''}$$

其中

$$x_k^{'}, x_k^{''} \geq 0$$

例9　将下述线性规划问题化为标准型

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 3 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \ge 0; x_3 \text{为无约束} \end{cases}$$

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

处理的步骤：

(1) 用x_4-x_5替换x_3，其中x_4，$x_5 \geq 0$；

(2) 在第一个约束不等式≤号的左端**加入**松弛变量x_6；

(3) 在第二个约束不等式≥号的左端**减去**剩余变量x_7；

(4) 令$z' = -z$，把求min z 改为求max z′，即可得到该问题的标准型

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$