



石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

线性规划与单纯形法

线性规划及其数学模型（一）

主讲：陈慧青



问题的提出

线性规划是运筹学的一个重要分支。线性规划在理论上比较成熟，在实用中的应用日益广泛与深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了。从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用。它已是现代科学管理的重要手段之一。



问题的提出

线性规划是在有限资源（劳动力、原材料、机械设备、资金、时间等）的条件下，合理分配和利用资源，以取得最佳的经济效益。

线性规划问题包含下述三个要素：

- 1) 决策变量
- 2) 约束条件
- 3) 目标函数

几类常见线性问题的建模

- ◆ 生产计划问题
- ◆ 污水问题
- ◆ 合理下料问题
- ◆ 配料问题
- ◆ 连续投资问题
- ◆ 人力资源分配问题
- ◆ 运输问题



例1 生产计划问题

某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗如表 1-1 所示，该工厂每生产一件产品 I 可获利 2 元，每生产一件产品 II 可获利 3 元，问应如何安排计划使该工厂获利最多？



表1-1

资源	产品 I	产品 II	拥有量
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16KG
原材料B	0	4	12KG



- 如何用数学关系式描述这问题，必须考虑
- ◆ 设 x_1, x_2 分别表示计划生产产品 I 产品 II 的数量，称它们为决策变量；
- ◆ 生产产品数量多少受到资源拥有量的限制，这是约束条件：
 - ◆ $x_1 + 2x_2 \leq 8$
 - ◆ $4x_1 \leq 16$
 - ◆ $4x_2 \leq 12$





- 生产产品的数量不会为负值，即
- $x_1, x_2 \geq 0$
- 如何安排生产，使利润最大这是目标，写成目标函数：
- $\max z = 2x_1 + 3x_2$
- 从而得到生产计划的数学模型。



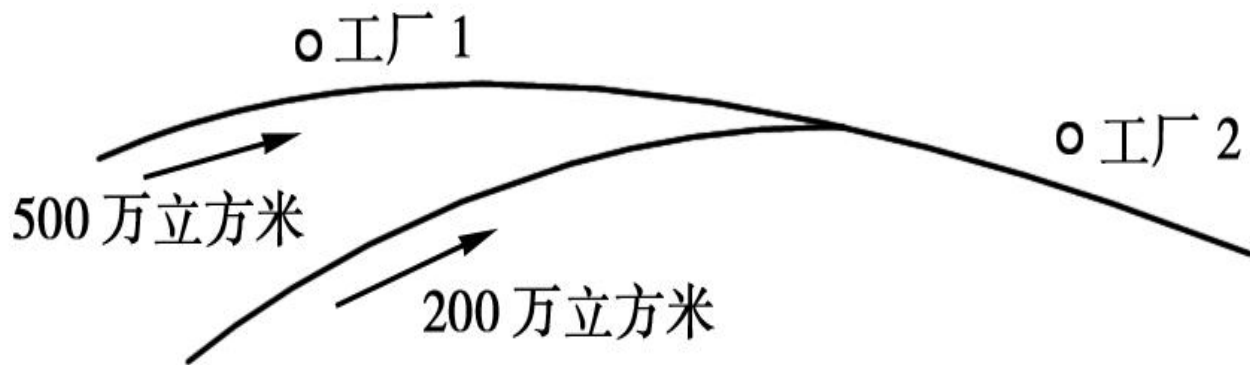
目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

例2 污水处理问题

靠近某河流有两个化工厂(见图1-1), 流经第一化工厂的河流流量为每天500万立方米, 在两个工厂之间有一条流量为每天200万立方米的支流。





第一化工厂每天排放含有某种有害物质的工业污水2万立方米，第二化工厂每天排放这种工业污水1.4万立方米。从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前，有20%可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于0.2%。这两个工厂都需各自处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是1000元/万立方米。第二化工厂处理工业污水的成本是800元/万立方米。现在要问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使这两个工厂总的处理工业污水费用最小。

建模之前的分析和计算

设：第一化工厂每天处理工业污水量为 x_1 万立方米，第二化工厂每天处理工业污水量为 x_2 万立方米

经第2工厂前的水质要求：
$$\frac{(2 - x_1)}{500} \leq \frac{2}{1000}$$

经第2工厂后的水质要求：

$$\frac{[0.8(2 - x_1) + (1.4 - x_2)]}{700} \leq \frac{2}{1000}$$

从而得到数学模型：

目标函数 $\min z = 1000 x_1 + 800 x_2$

约束条件 $x_1 \geq 1$

$$0.8x_1 + x_2 \geq 1.6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 1.4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

例3 合理下料问题

合理利用线材问题。现要做100套钢架，每套需用长为2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，问应如何下料，使用的原材料最省。

解：最简单做法是，在每一根原材料上截取2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根组成一套，每根原材料剩下料头0.9m ($7.4 - 2.9 - 2.1 - 1.5 = 0.9$)。为了做100套钢架，需用原材料100根，共有90m料头。若改为用套裁，这可以节约原材料。下面有几种套裁方案，都可以考虑采用。

◆ 表1-2 套裁方案有

下料根数 长度(m)	方 案				
	I	II	III	IV	V
2.9	1	2		1	
2.1	0		2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了得到100套钢架，需要混合使用各种下料方案。设按Ⅰ方案下料的原材料根数为 x_1 ，Ⅱ方案为 x_2 ，Ⅲ方案为 x_3 ，Ⅳ方案为 x_4 ，Ⅴ方案为 x_5 。根据表1-2的方案，可列出以下数学模型：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$