



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

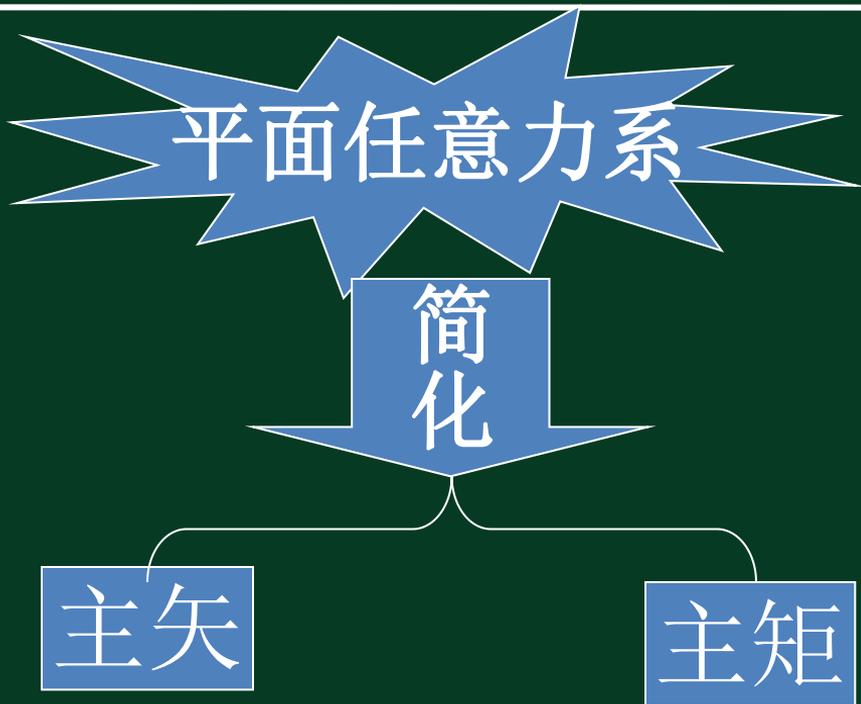
在线开放课程

理论力学

平面任意力系的求解

平面任意力系的平衡方程

主讲：房学谦



$$F_R' = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}) = 0$$

平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的必要和充分条件是力系的主矢和对任一点的主矩都等于零。

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_O(F) = 0$$

平面任意力系的平衡方程

平面任意力系的平衡方程



在线开放课程

平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

一个研究对象在平衡的平面任意力系作用下具有3个独立的平衡方程式。

平面力系平衡方程的其他形式

• 二力矩式:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A 、 B 两点的连线应不垂直于投影轴 x 。

• 三力矩式:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A 、 B 、 C 必须是平面内不共线的任意三点。

求解平面力系的平衡问题时的一般步骤

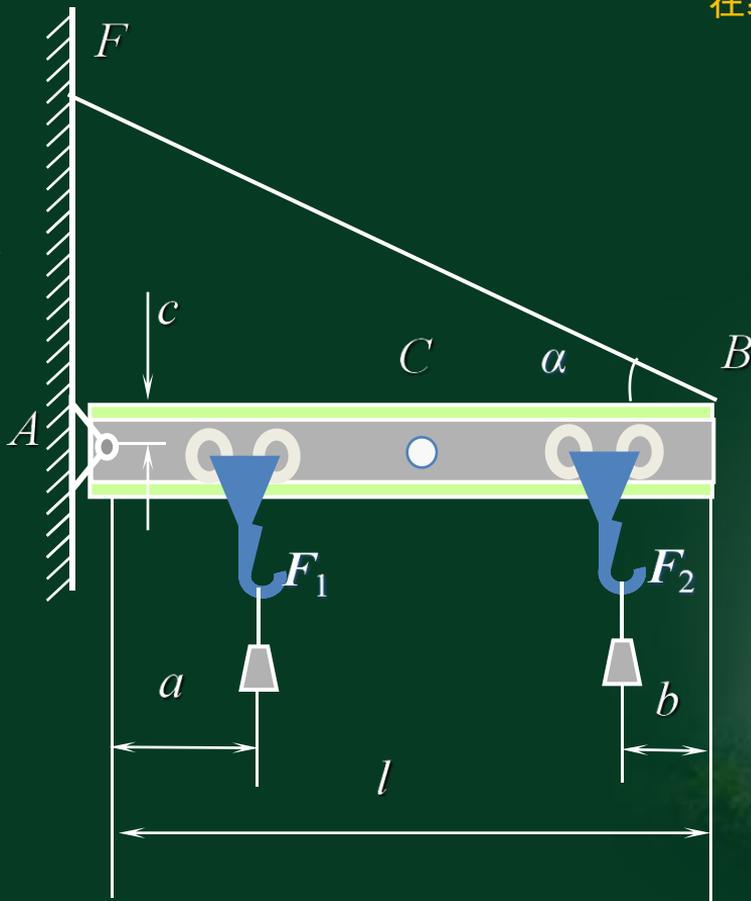
- 1) 选取研究对象；
- 2) 画受力图；
- 3) 建立坐标轴；
- 4) 列平衡方程求解未知量。

注意：1) 列平衡方程时矩心应选在多个未知力的交点上，坐标轴应当与尽可能多的未知力垂直；利用合力矩定理求力对点之矩。

2) 力偶没有投影。

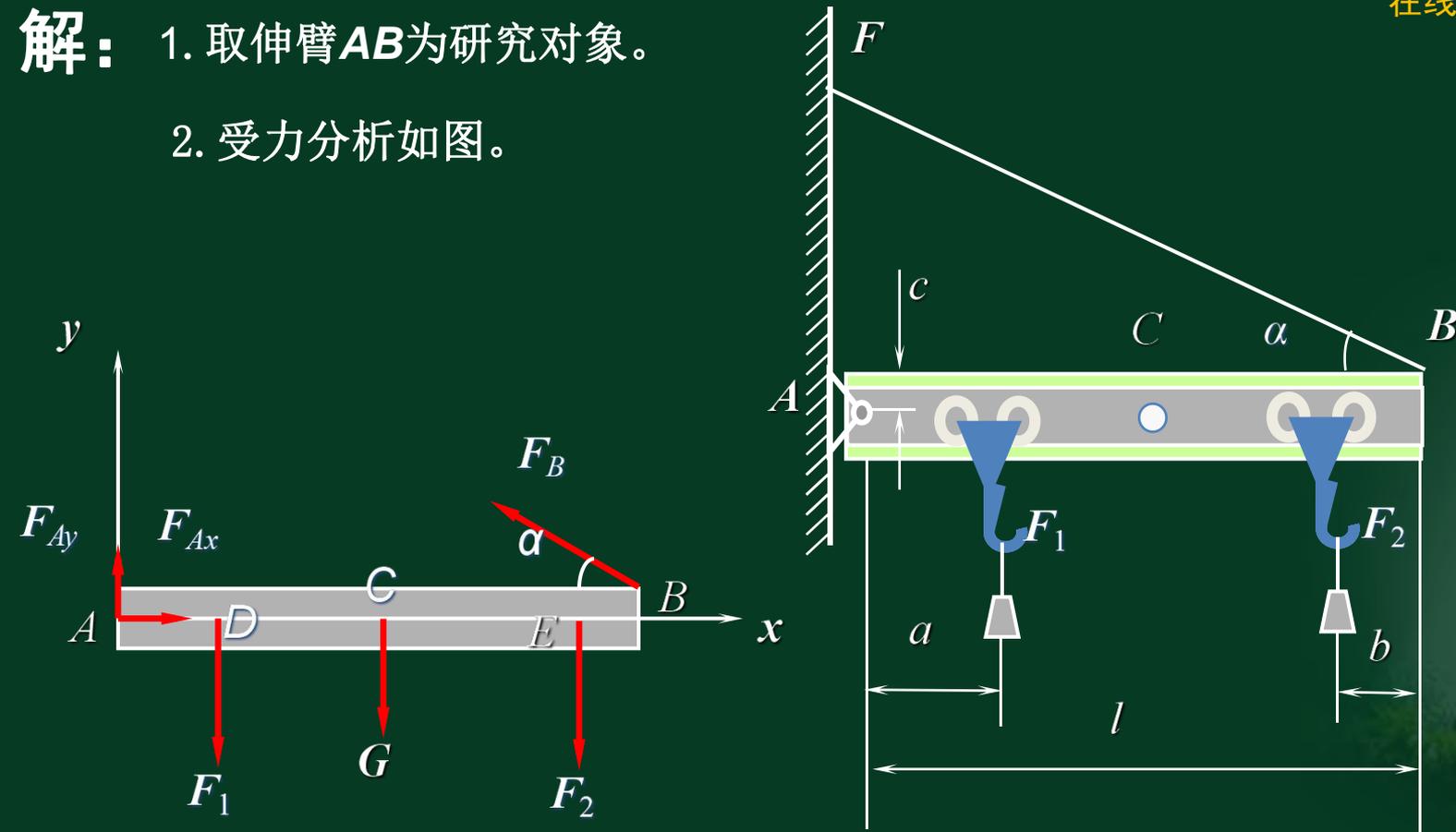
平面任意力系的平衡方程

伸臂式起重机如图所示，匀质伸臂 AB 重 $G=2\,200\text{ N}$ ，吊车 D ， E 连同吊起重物各重 $F_1=F_2=4\,000\text{ N}$ 。有关尺寸为： $l=4.3\text{ m}$ ， $a=1.5\text{ m}$ ， $b=0.9\text{ m}$ ， $c=0.15\text{ m}$ ， $\alpha=25^\circ$ 。试求铰链 A 对臂 AB 的水平和铅直约束力，以及拉索 BF 的拉力。



平面任意力系的平衡方程

- 解：**
1. 取伸臂AB为研究对象。
 2. 受力分析如图。



平面任意力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

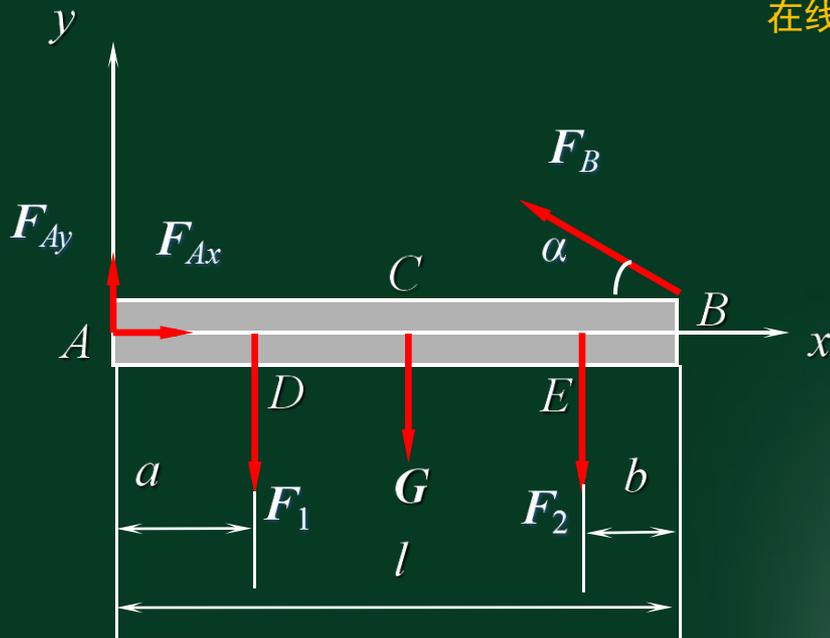
$$F_{Ax} - F_B \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} - F_1 - G - F_2 + F_B \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$-F_1 \times a - G \times \frac{l}{2} - F_2 \times (l - b) + F_B \cos \alpha \times c + F_B \sin \alpha \times l = 0$$



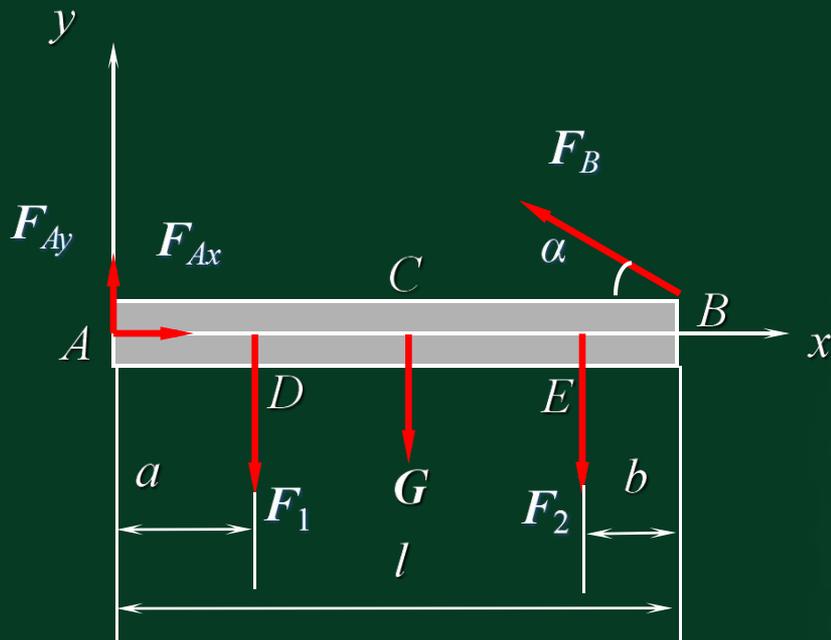
平面任意力系的平衡方程

4. 联立求解。

$$F_B = 12\,456\text{ N}$$

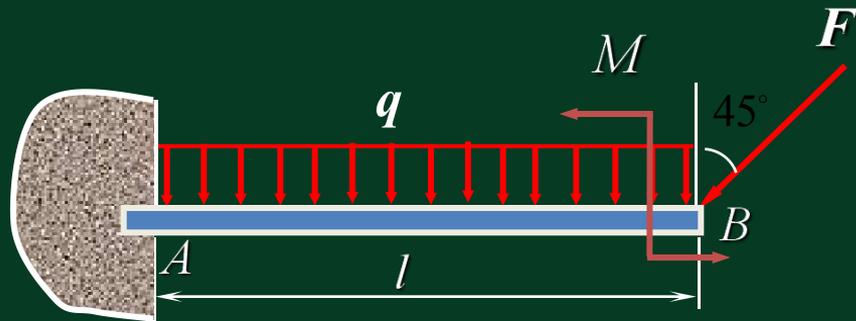
$$F_{Ax} = 11\,290\text{ N}$$

$$F_{Ay} = 4\,936\text{ N}$$



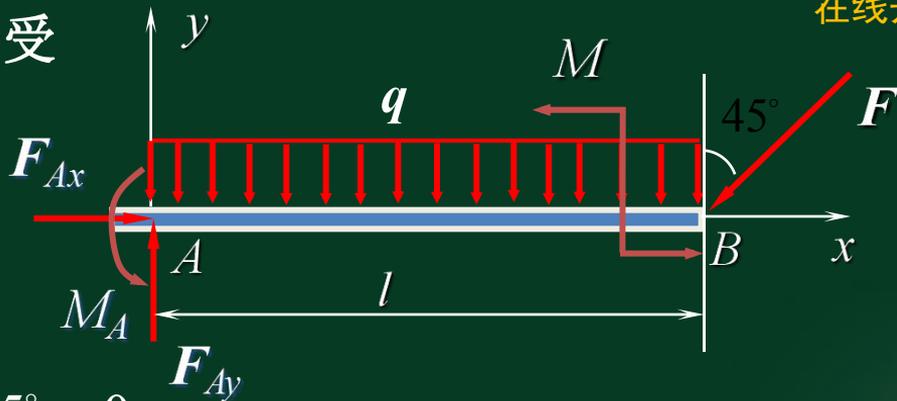
平面任意力系的平衡方程

如图所示为一悬臂梁， A 为固定端，设梁上受强度为 q 的均布载荷作用，在自由端 B 受一集中力 F 和一力偶 M 作用，梁的跨度为 l ，求固定端的约束力。



平面任意力系的平衡方程

解： 1. 取梁为研究对象，受力分析如图



2. 列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - ql - F \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0,$$

$$M_A - ql \times \frac{l}{2} - F \cos 45^\circ \times l + M = 0$$

平面任意力系的平衡方程

解：1. 取梁为研究对象，
受力分析如图

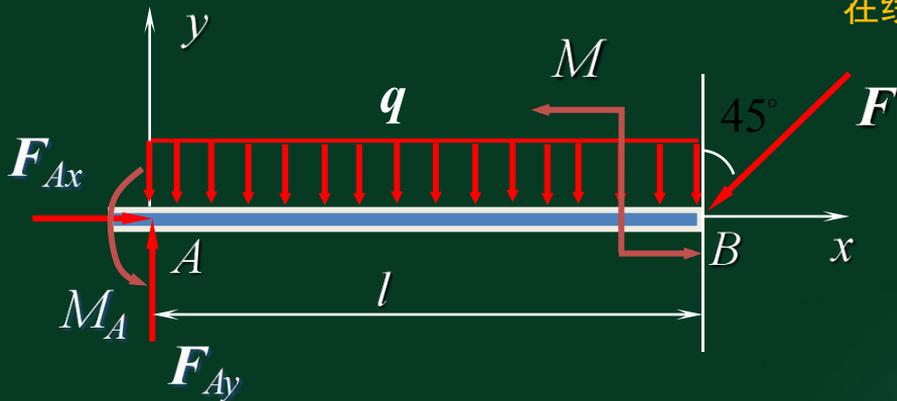
2. 列平衡方程

3. 解方程

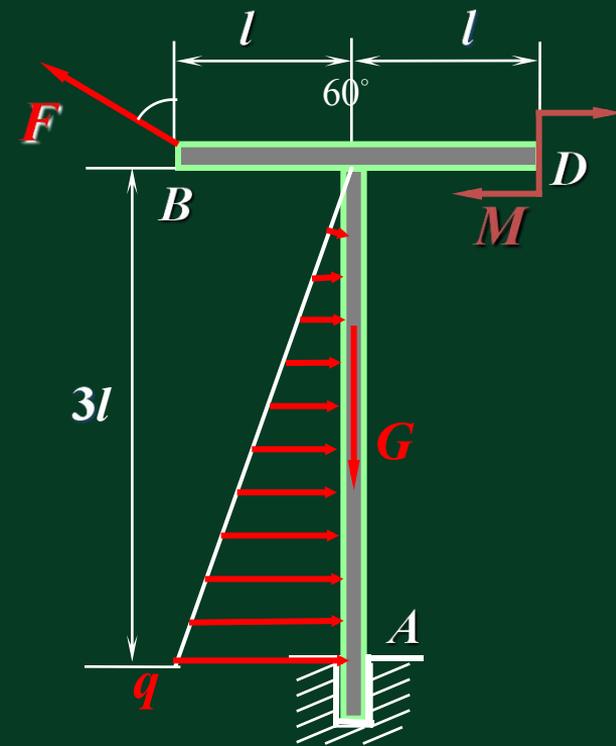
$$F_{Ax} = F \cos 45^\circ = 0.707 F$$

$$F_{Ay} = ql + 0.707F$$

$$M_A = \frac{1}{2}ql^2 + 0.707Fl - M$$



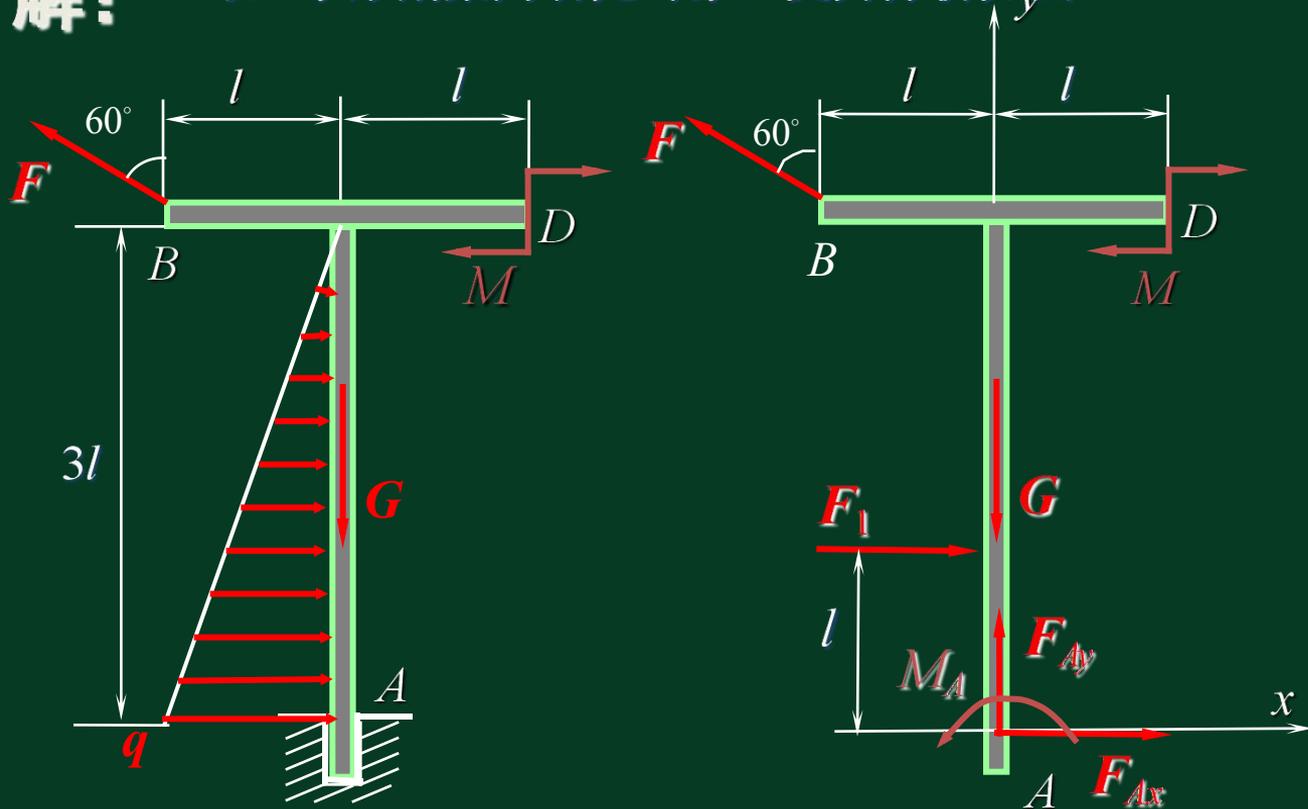
平面任意力系的平衡方程



自重为 $G=100\text{ kN}$ 的T字形刚架 ABD ，置于铅垂面内，载荷如图所示，其中 $M=20\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $F=400\text{ kN}$ ， $q=20\text{ kN/m}$ ， $l=1\text{ m}$ 。试求固定端 A 的约束力。

平面任意力系的平衡方程

解： 1. 取T字形刚架为研究对象，受力分析如图。



平面任意力系的平衡方程

2. 按图示坐标，列写平衡方程。

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Ax} + F_1 - F \sin 60^\circ = 0$$

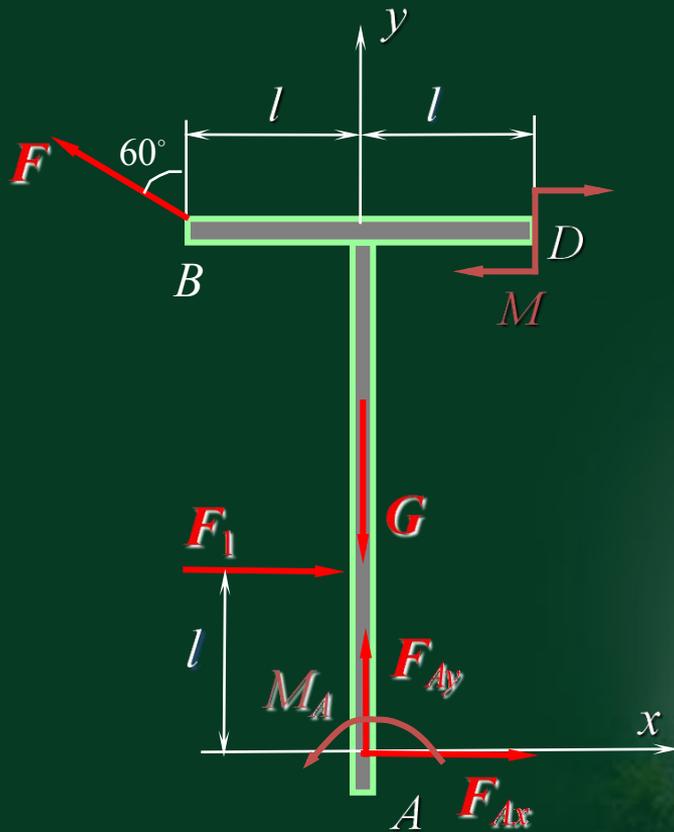
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} - G + F \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$M_A - M - F_1 \times l - F \cos 60^\circ \times l$$

$$+ F \sin 60^\circ \times 3l = 0$$



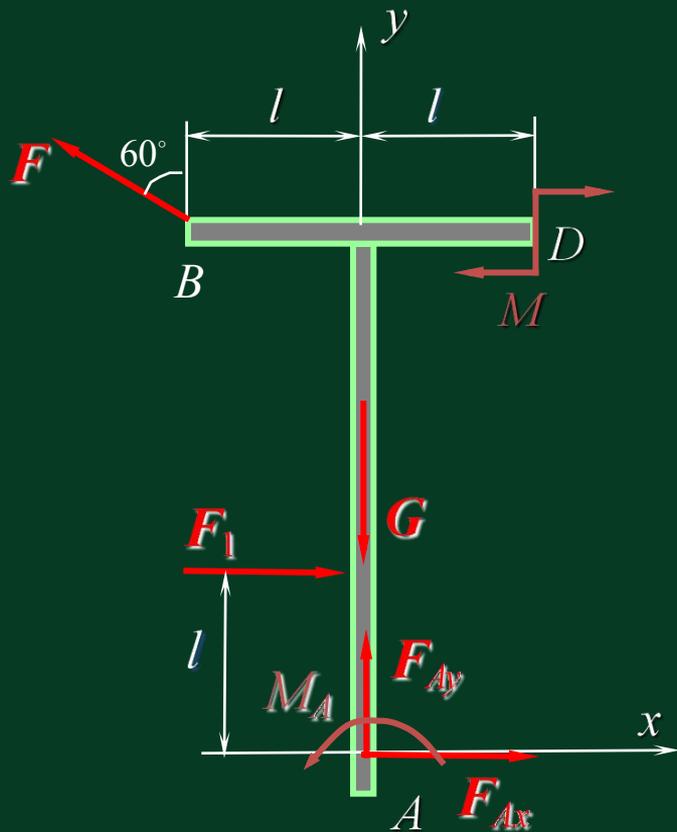
平面任意力系的平衡方程

3. 联立求解。

$$F_{Ax} = 316.4 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = -100 \text{ kN}$$

$$M_A = -789.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



平面任意力系的平衡方程

小结：求解平面力系的平衡问题时的一般步骤

- 1) 选取研究对象；
- 2) 画受力图；
- 3) 建立坐标轴；
- 4) 列平衡方程求解未知量。



再见！