



石家莊鐵道大學  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

理论力学

平面任意力系的求解

平面任意力系的简化结果分析

主讲：房学谦

## 1) 简化为一力偶的情况

若 $F_R' = 0$ ,  $M_O \neq 0$ , 则原力系简化为一个合力偶。

合力偶矩为

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(F_i) \quad \text{此时主矩与简化中心的选择无关。}$$

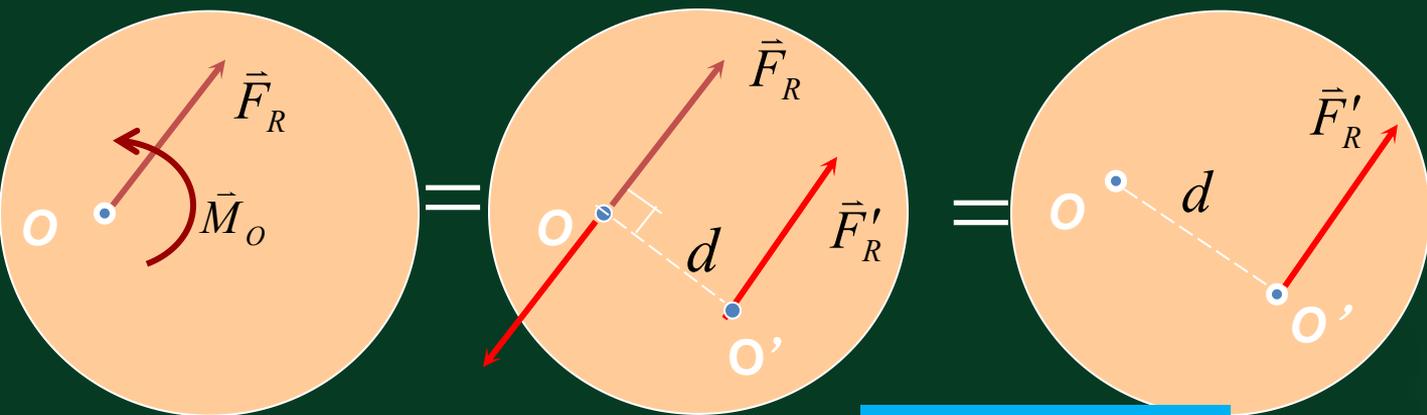
## 2) 简化为一合力的情况

(1) 若 $F_R' \neq 0$ ,  $M_O = 0$ , 力 $F_R'$ 就是原力系的合力 $F_R$ 。

此时合力 $F_R$ 的作用线通过简化中心。

# 平面任意力系的简化结果分析

(2)  $F_R' \neq 0$ ,  $M_O \neq 0$ , 此时仍可合成为一个合力。



只要满足：

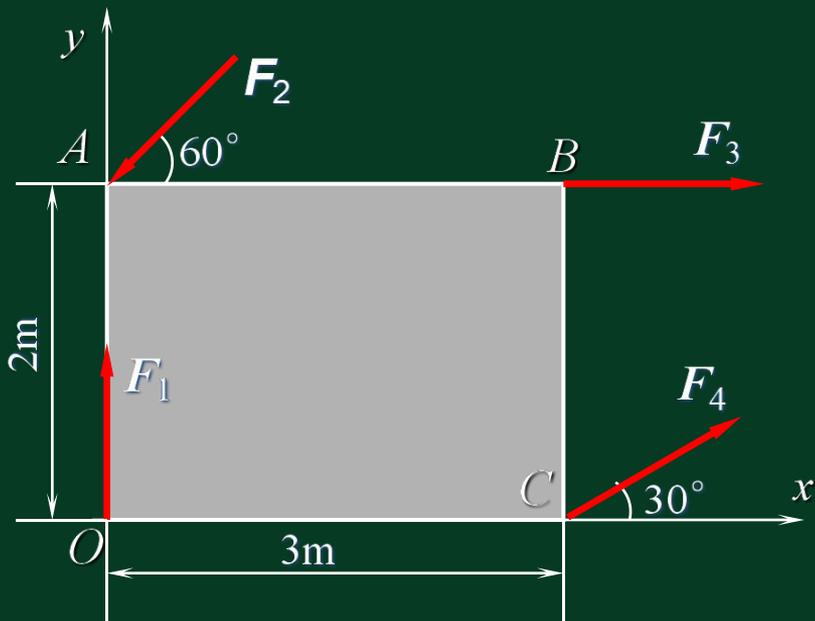
3) 平面力系为平衡力系的情况

若  $F_R' = 0$ ,  $M_O = 0$ , 则原力系为平衡力系。

$$\vec{F}'_R = \vec{F}_R, \quad d = \frac{M_O}{F_R}$$

# 平面任意力系的简化结果分析

在长方形平板的 $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 点上分别作用着有四个力： $F_1=1$  kN,  $F_2=2$  kN,  $F_3=F_4=3$  kN（如图），试求以上四个力构成的力系对 $O$ 点的简化结果，以及该力系的最后合成结果。



# 平面任意力系的简化结果分析

解： 求向O点简化结果

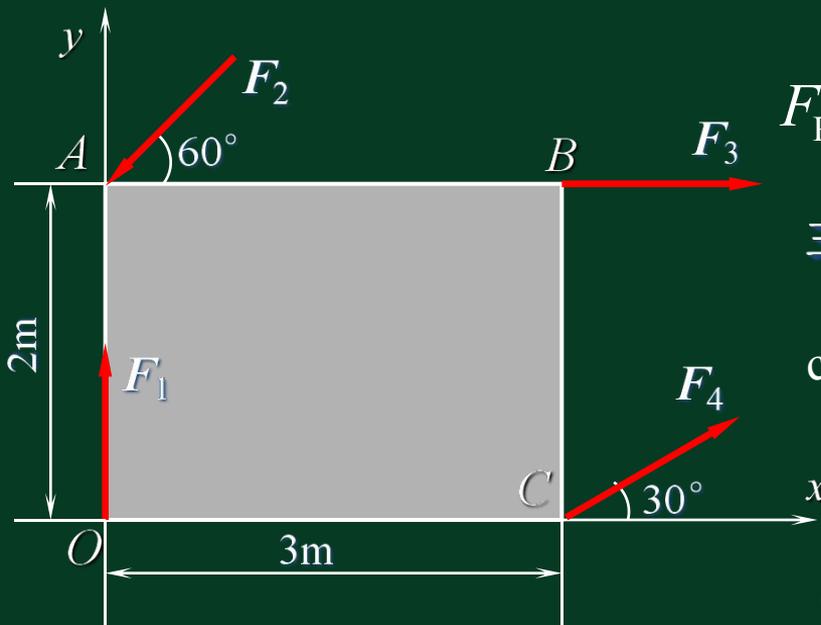
1. 求主矢  $F'_R$  。 建立如图坐标系  $Oxy$ 。

$$\begin{aligned}F'_{Rx} &= \sum F_x \\ &= -F_2 \cos 60^\circ + F_3 + F_4 \cos 30^\circ \\ &= 0.598 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'_{Ry} &= \sum F_y \\ &= F_1 - F_2 \sin 60^\circ + F_4 \sin 30^\circ \\ &= 0.768 \text{ kN}\end{aligned}$$

# 平面任意力系的简化结果分析

解： 所以，主矢的大小



$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = 0.794 \text{ kN}$$

主矢的方向:

$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = 0.614$$

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = 52.1^\circ$$

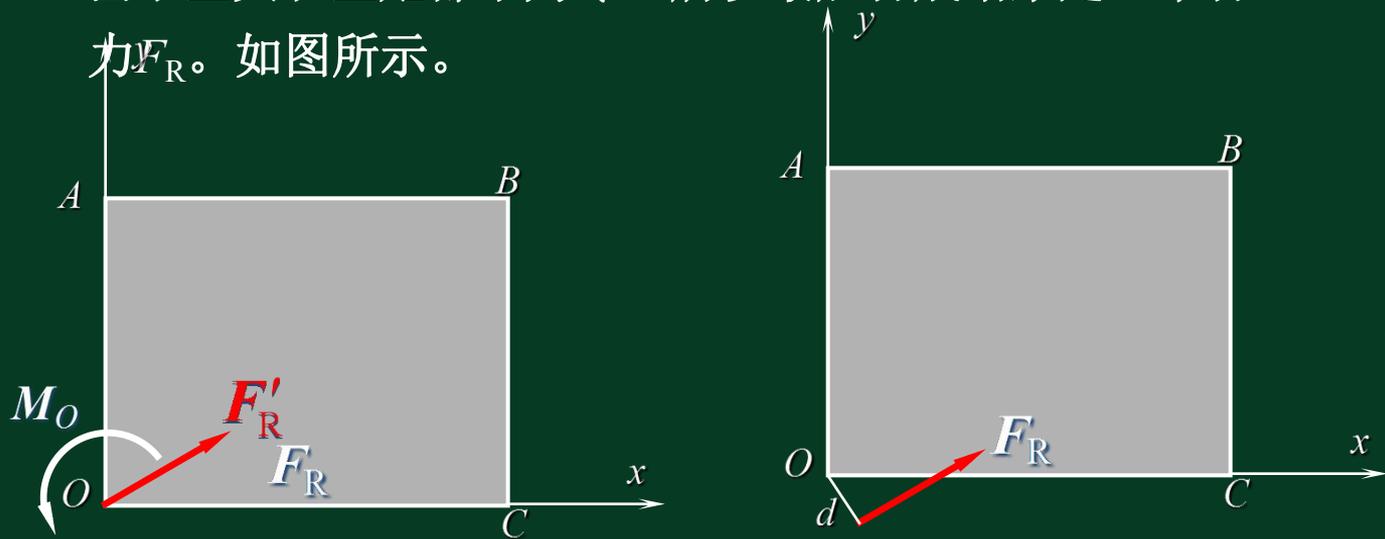
$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{F'_{Ry}}{F'_R} = 0.789$$

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = 37.9^\circ$$

# 平面任意力系的简化结果分析

**解：** 最后合成结果

由于主矢和主矩都不为零，所以最后合成结果是一个合力 $F_R$ 。如图所示。

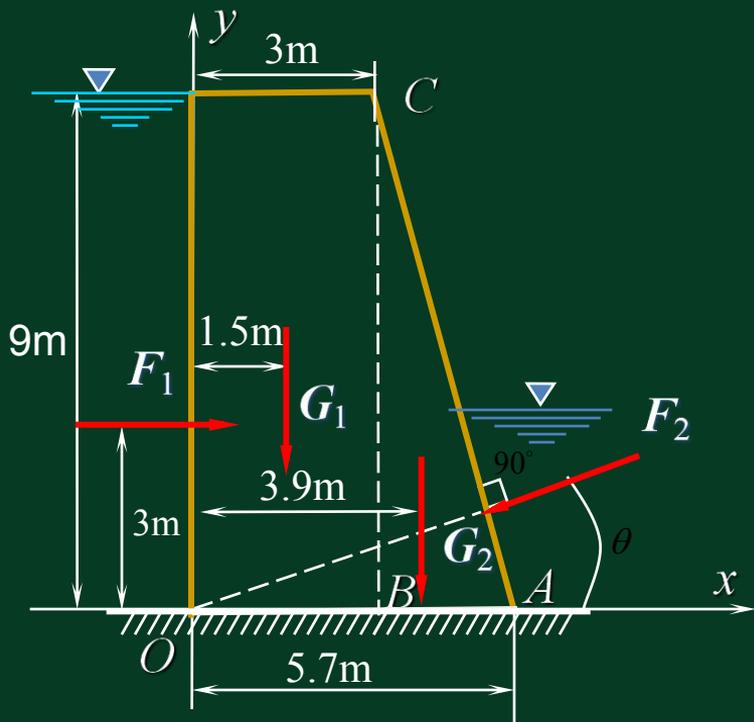


$F_R = F'_R$  合力 $F_R$ 到 $O$ 点的距离

$$d = \frac{M_O}{F'_R} = 0.51 \text{ m}$$

# 平面任意力系的简化结果分析

重力坝受力情况如图所示。 $G_1=450\text{kN}$ ， $G_2=200\text{kN}$ ， $F_1=300\text{ kN}$ ， $F_2=70\text{ kN}$ 。求力系向点 $O$ 简化的结果，合力与基线 $OA$ 的交点到 $O$ 点的距离 $x$ ，以及合力作用线方程。



# 平面任意力系的简化结果分析

**解：** 1. 将力系向O点简化，得主矢和主矩，如右图所示。

$$\theta = \angle ACB = \arctan \frac{AB}{CB} = 16.7^\circ$$

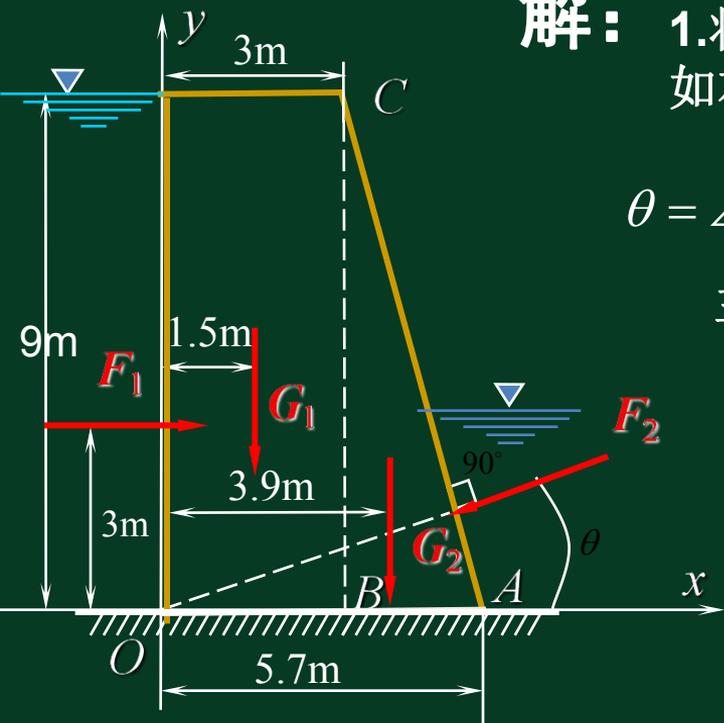
主矢的投影

$$F'_{Rx} = \sum F_x =$$

$$F_1 - F_2 \cos \theta = 232.9 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y =$$

$$= -G_1 - G_2 - F_2 \sin \theta = -670.1 \text{ kN}$$



# 平面任意力系的简化结果分析

**解：** 1.将力系向O点简化，得主矢和主矩，如左图所示。

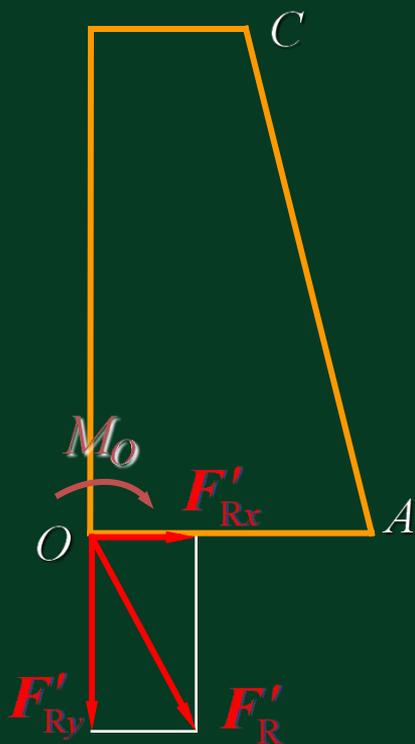
力系主矢 $F'_R$ 的大小

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4 \text{ kN}$$

主矢 $F'_R$ 的方向余弦

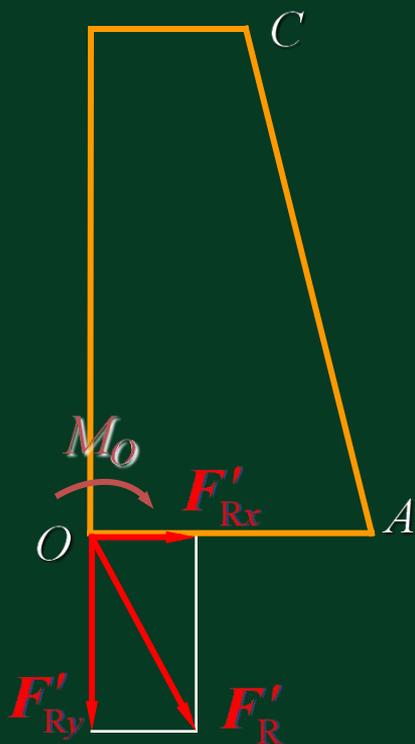
$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{\sum F_x}{F'_R} = 0.328$$

$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{\sum F_y}{F'_R} = -0.945$$



# 平面任意力系的简化结果分析

**解：** 1.将力系向O点简化，得主矢和主矩，如右图所示。



$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4 \text{ kN}$$

$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{\sum F_x}{F'_R} = 0.328$$

$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{\sum F_y}{F'_R} = -0.945$$

则有

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = -70.84^\circ$$

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = 180^\circ + 19.16^\circ$$

# 平面任意力系的简化结果分析

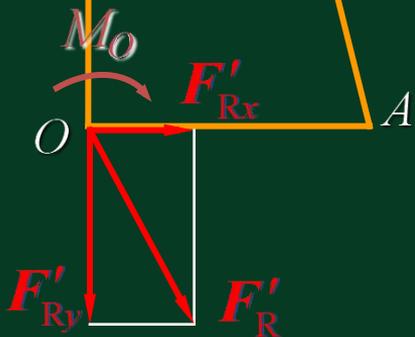
解:

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = -70.84^\circ$$

$$\angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = 180^\circ + 19.16^\circ$$

主矢 $F'_R$ 在第四象限内，与x轴的夹角为 $-70.84^\circ$ 。

力系对O点的主矩为



$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F})$$

$$= -F_1 \times 3 \text{ m} - G_1 \times 1.5 \text{ m} - G_2 \times 3.9 \text{ m}$$

$$= -2\,355 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 2. 求合力与基线OA的交点到O点的距离 $x$ 。

合力作用线位置由合力矩定理求得。

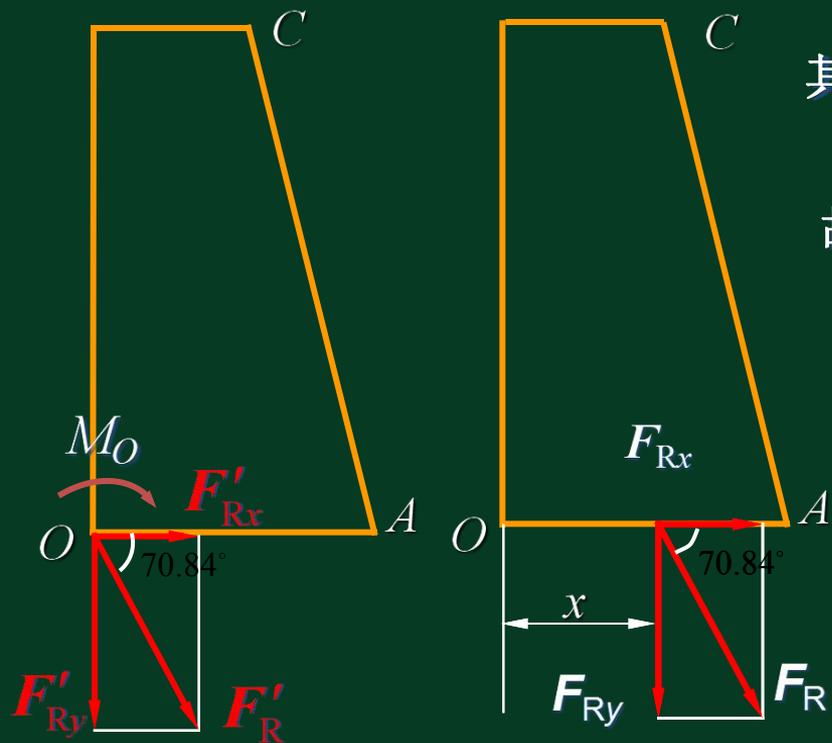
$$M_O = M_O(\mathbf{F}_R) = M_O(\mathbf{F}_{Rx}) + M_O(\mathbf{F}_{Ry})$$

其中  $M_O(\mathbf{F}_{Rx}) = 0$

故  $M_O = M_O(\mathbf{F}_{Ry}) = F_{Ry} \cdot x$

解得

$$x = \frac{M_O}{F_{Ry}} = 3.514\text{m}$$



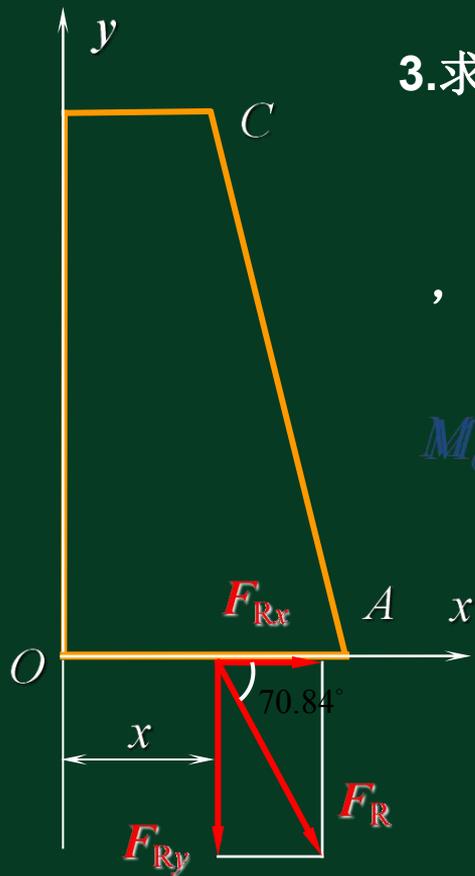
# 平面任意力系的简化结果分析

## 3. 求合力作用线方程。

设合力作用线上任一点的坐标为  $(x, y)$ ，  
将合力作用于此点，则

$$M_O = M_O(F_R) = xF_{Ry} - yF_{Rx} = x\sum F_y - y\sum F_x$$

可得合力作用线方程



# 平面任意力系的简化结果分析

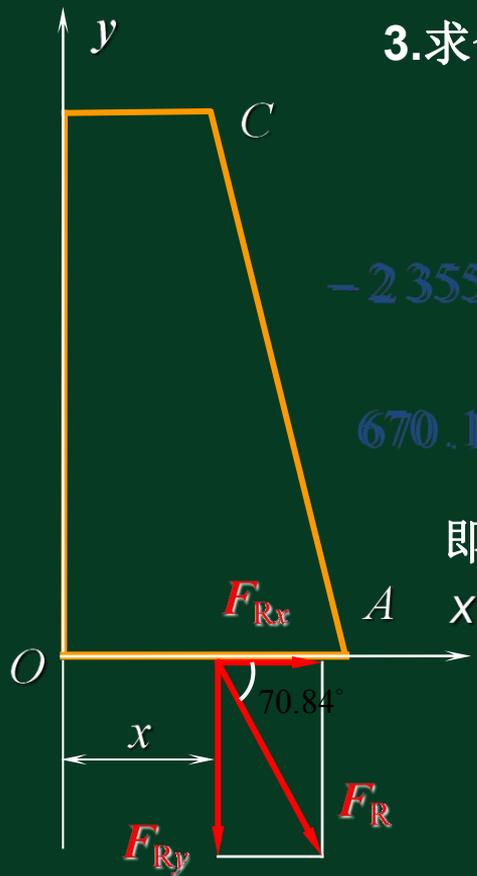
3.求合力作用线方程。

可得合力作用线方程

$$-2355 \text{ kN} \cdot \text{m} = (-670.1 \text{ kN}) \times x - (232.9 \text{ kN}) \times y$$

$$670.1 \text{ kN} \times x + 232.9 \text{ kN} \times y - 2355 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

即  $670.1x + 232.9y - 2355 = 0$



# 小结

## 1. 简化为一力偶的情况

若 $F_R' = 0$ ,  $M_O \neq 0$ , 则原力系简化为一个合力偶。合力偶矩为

## 2. 简化为一合力的情况

(1) 若 $F_R' \neq 0$ ,  $M_O = 0$ , 力 $F_R'$ 就是原力系的合力 $F_R$ 。

此时合力 $F_R$ 的作用线通过简化中心。

(2)  $F_R' \neq 0$ ,  $M_O \neq 0$ , 此时仍可合成为一个合力。

## 3. 平面力系为平衡力系的情况

若 $F_R' = 0$ ,  $M_O = 0$ , 则原力系为平衡力系。

# 小测

---

- 某平面力系向A、B两点简化的主矩都为零，此力系简化的最终结果可能是一个力吗？可能是一个力偶吗？可能平衡吗？
- 平面汇交力系向汇交点以外一点简化，其结果可能是一个力吗？可能是一个力偶吗？可能是一个力和一个力偶吗？
- 某平面力系向同平面内任意一点简化的结果都相同，此力系简化的最终结果可能是什么？