石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

理论力学

力对点之矩与力偶

矢量的点积与叉积

主讲 ： 郭树起

矢量的点积与叉积

目录

什么是标量与矢量
矢量的加法与减法
矢量的点积
矢量的叉积

什么是标量与矢量

工程力学中的物理量可以用标量或矢量来表示。

标量：有数值，无方向的物理量。

例如，长度，质量，体积，温度，能量。

与坐标系无关。有单位。

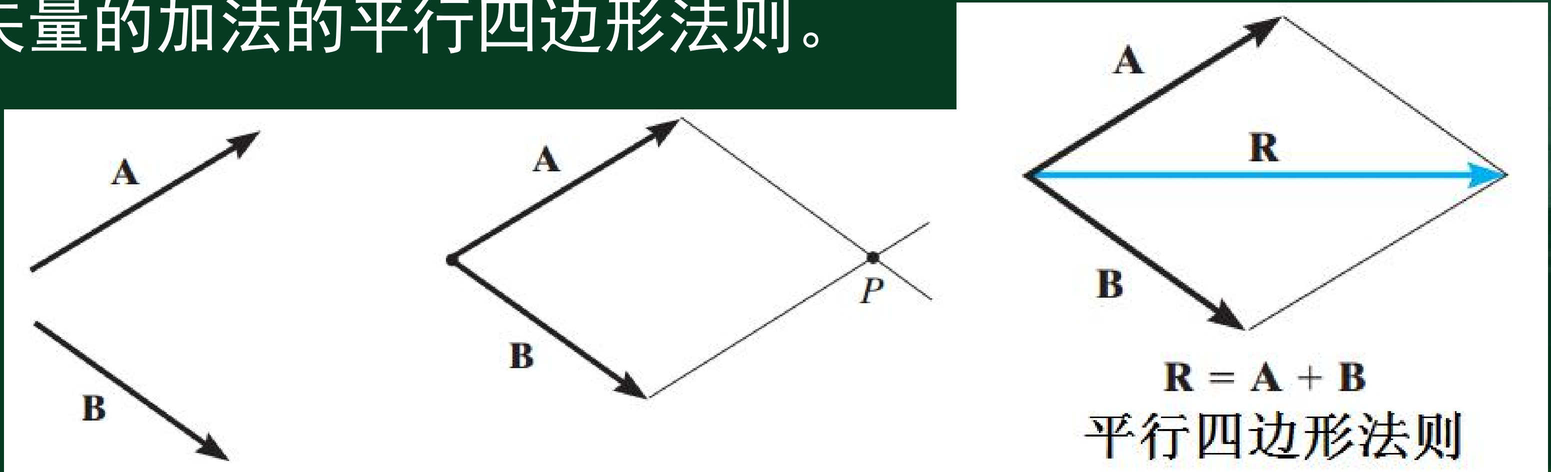
什么是标量与矢量

工程力学中的物理量可以用标量或矢量来表示。

矢量：有数值，有方向的物理量。

例如，力，动量，位置。

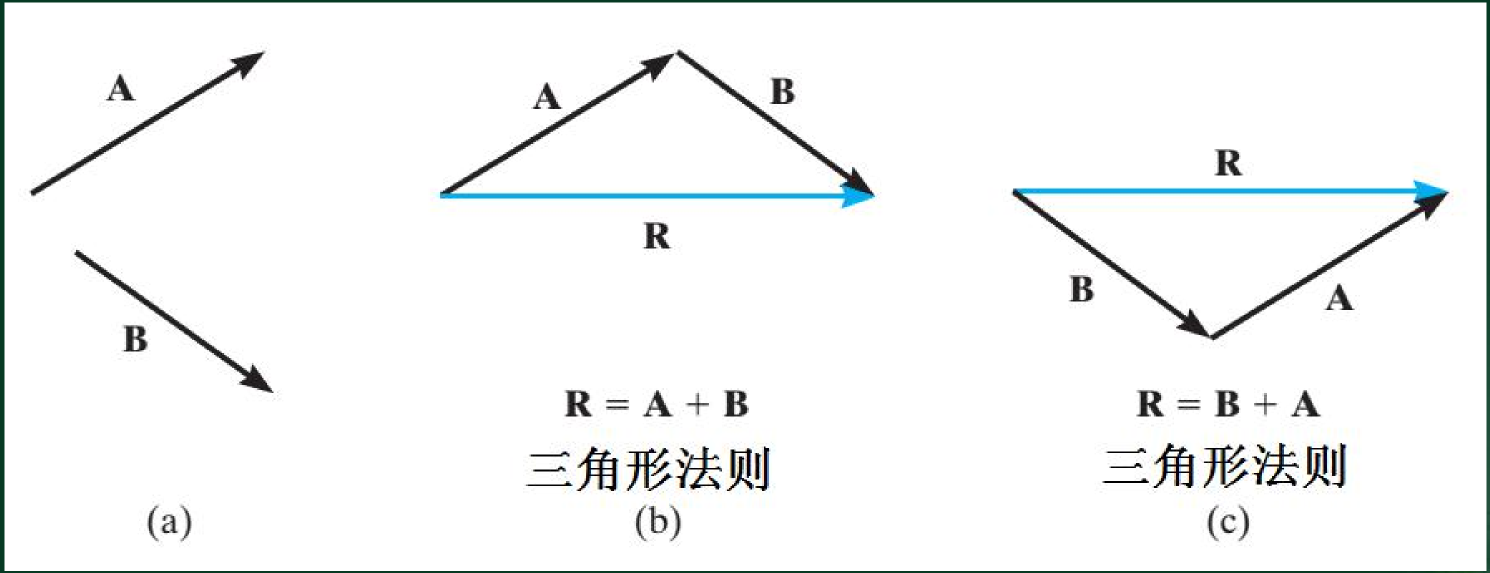
矢量的加法的平行四边形法则。



平行四边形法则

什么是标量与矢量

矢量加法的三角形法则。



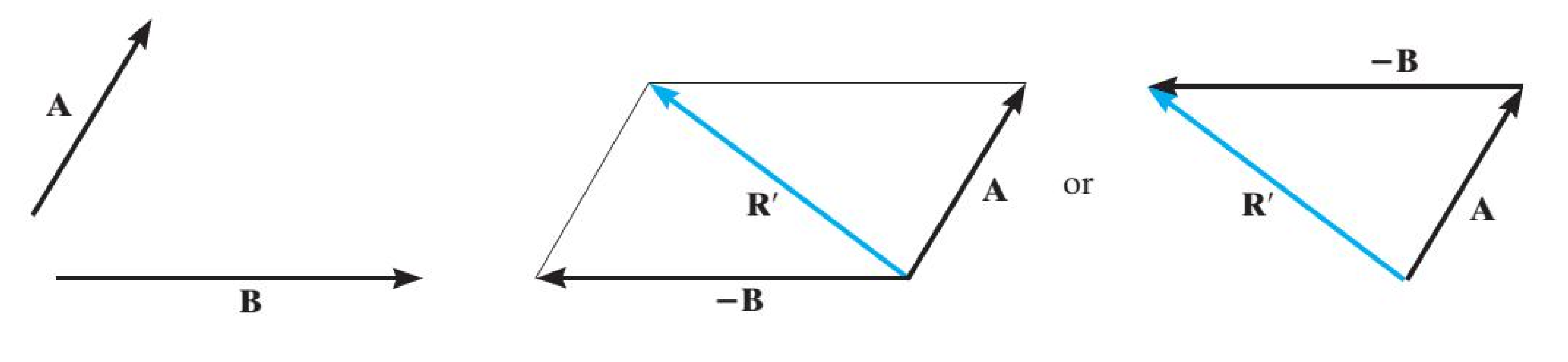
什么是标量与矢量

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

矢量的减法。

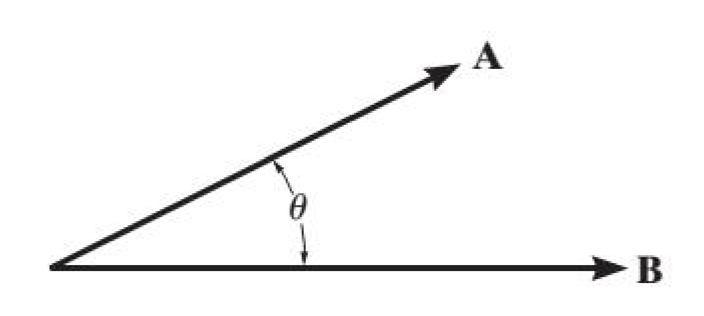
$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$



矢量的点积

力学中有时要度量两条线之间的角度、或者考虑力在某条线上的投影。就会用到矢量的点积。

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta}$$



$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \quad 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0, \theta = \cos^{-1} 0 = 90^\circ$$

矢量的点积

力学中有时要度量两条线之间的角度、或者考虑力在某条线上投影。就会用到矢量的点积。

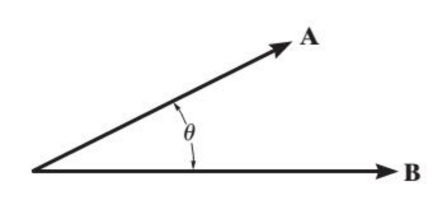
$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0.$$

矢量的点积

点积的直角坐标表示。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + (A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$



$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

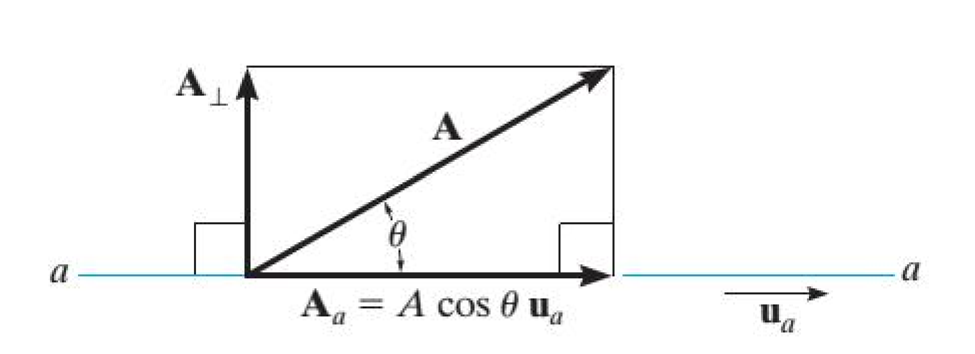
矢量的点积

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
在线开放课程

力学中有时要度量两条线之间的角度、或者考虑力在某条线上的投影。就会用到矢量的点积。

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta}$$

$$A_a = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_a$$



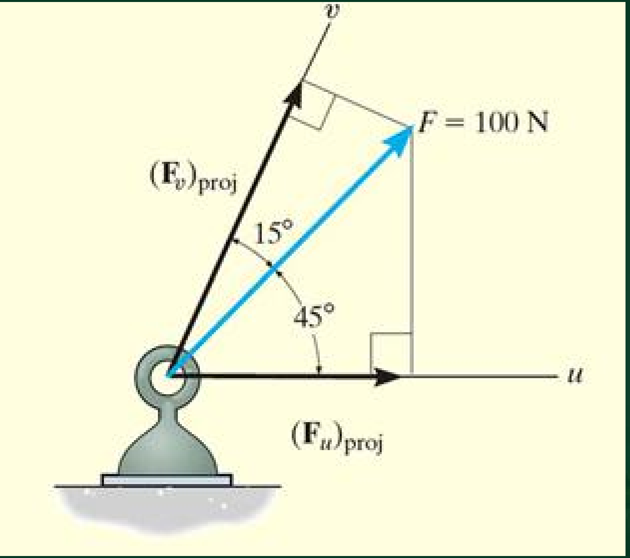
矢量的点积

力学中有时要度量两条线之间的角度、或者考虑力在某条线上的投影。就会用到矢量的点积。

矢量的点积

例题：确定力F在u与v轴上的投影大小。

$$(F_u)_{proj} = (100\ \text{N})\cos 45^\circ = 70.7\ \text{N}$$
$$(F_v)_{proj} = (100\ \text{N})\cos 15^\circ = 96.6\ \text{N}$$



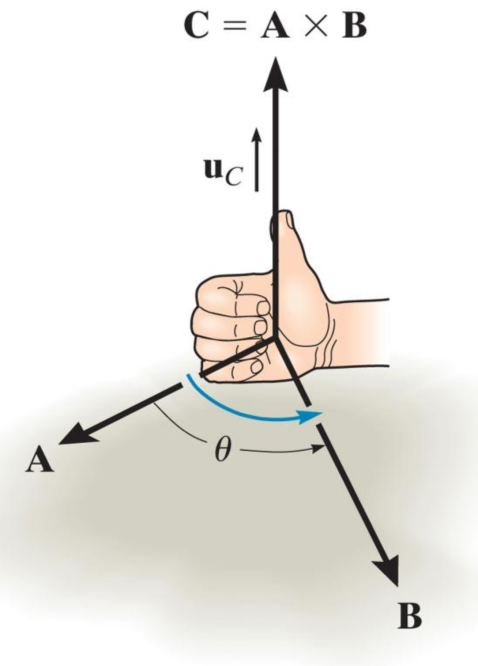
矢量的叉积

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

在线开放课程

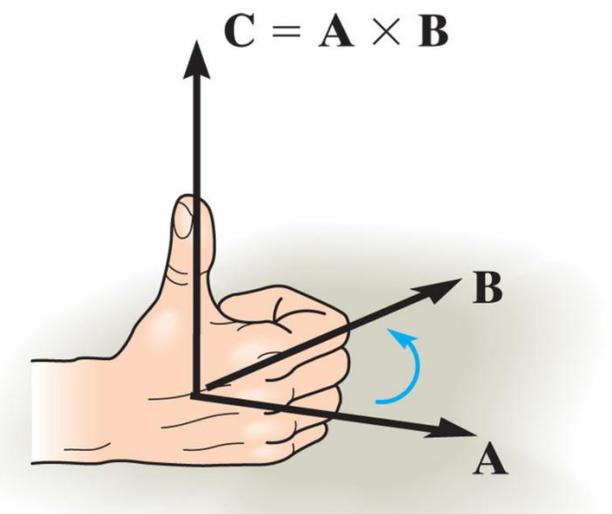
学习空间力对点之矩之前，需要学习矢量的叉积。

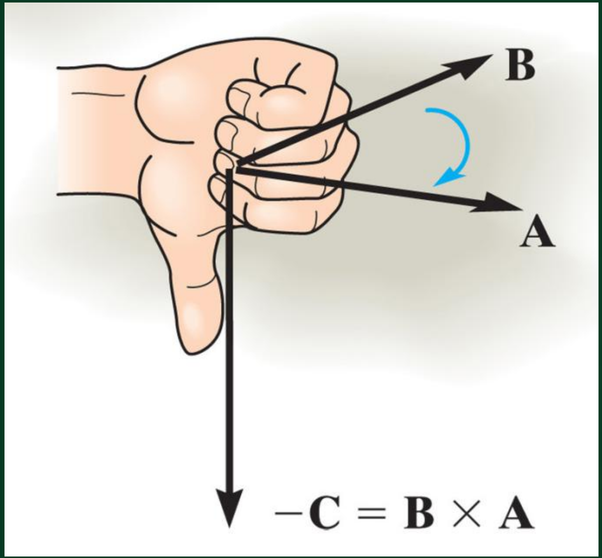
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta)\mathbf{u}_C$$



矢量的叉积

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

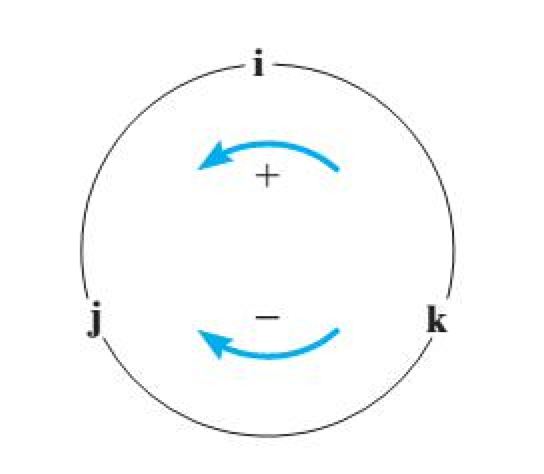


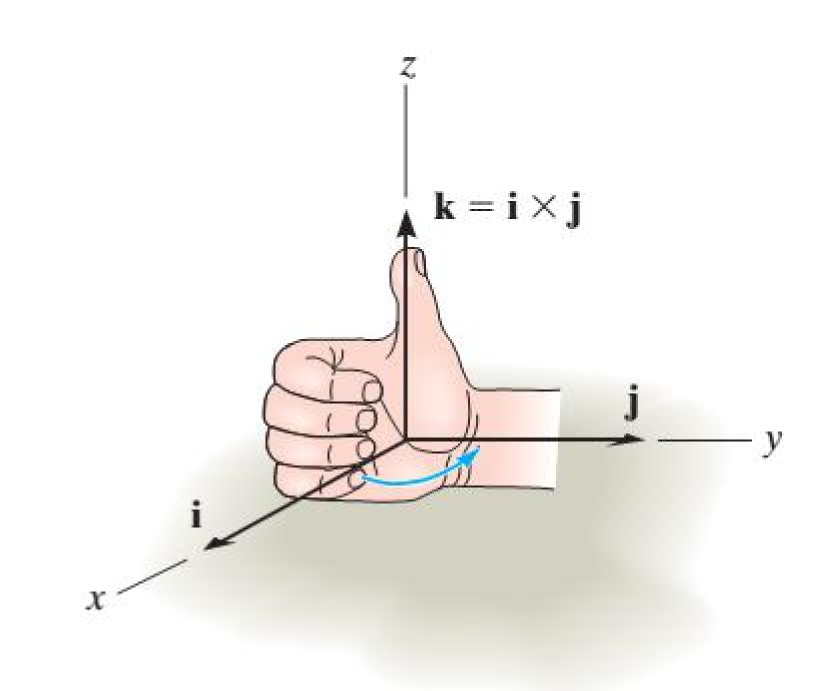


矢量的叉积

在线开放课程

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}\quad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}\quad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$





矢量的叉积

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
&= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k})
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}
$$

$$
\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}
$$

矢量的叉积

$$a(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (a\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(a\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})a$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\times\mathbf{D})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + D_x & B_y + D_y & B_z + D_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}$$

$$= (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\times\mathbf{D})$$

谢谢大家！