



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

概率论与数理统计

参数估计

参数的区间估计

主讲：王丽英

目录



网络精品课程

1

置信区间及求法

2

单正态总体参数区间估计

1. 置信区间及求法



网络精品课程

本节将引入另一类估计：**区间估计**。在区间估计理论中，被广泛接受的一种观点是**置信区间**。它是由奈曼(Neymann)于1943年提出的。

1. 置信区间及求法



网络精品课程

定义 设 θ 是总体参数，对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$)，若有两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha,$$

则称(随机)区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的**置信水平**(或**置信度**)为 $1-\alpha$ 的**置信区间**.

$\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$ 分别称为**置信下限**和**置信上限**.

1. 置信区间及求法



网络精品课程

置信区间及置信水平的解释

置信区间的置信水平为 $1-\alpha$ 指的是在大量使用该置信区间时，至少有 $100(1-\alpha)\%$ 的区间盖住 θ 。

1. 置信区间及求法



网络精品课程

引例 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, μ 为未知, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本, 求 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

1. 置信区间及求法



网络精品课程

基本思想：在点估计的基础上，构造合适的含样本及待估参数 θ 的函数 U ，且 U 的分布已知，然后针对给定的置信度导出置信区间。

1. 置信区间及求法



网络精品课程

一般步骤:

- (1) 选取未知参数 θ 的某个较优估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) 围绕 $\hat{\theta}$ 构造一个依赖于样本与参数 θ 的函数
 $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$, 且 U 的分布已知;
- (3) 对给定的置信水平 $1 - \alpha$, 确定 λ_1 与 λ_2 , 使
$$P\{\lambda_1 \leq U \leq \lambda_2\} = 1 - \alpha,$$

则 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 就是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

2.单正态总体参数的区间估计



石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

均值 μ 的置信区间

σ^2 为已知,

μ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right).$$

2.单正态总体参数的区间估计



网络精品课程

推导过程如下：

因为 \bar{X} 是 μ 的无偏估计，

$$\text{且 } U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

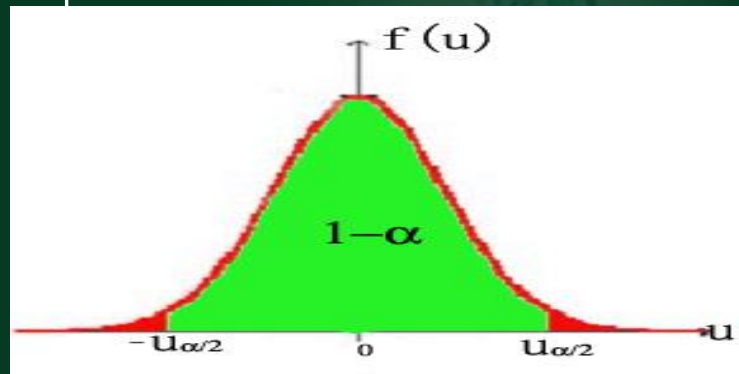
$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 是不依赖于任何其他未知参数.

2.单正态总体参数的区间估计

由标准正态分布的上侧 α 分位点的定义知

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\leq u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即
$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\leq\mu\leq\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$



2. 单正态总体的区间估计



网络精品课程

于是得 μ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right).$

其置信区间的长度为 $2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} .$

2. 单正态总体的区间估计

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 置信水平 $1-\alpha$

参数	条件	枢轴变量及其分布	$1-\alpha$ 置信区间
μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$
	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$

2. 单正态总体的区间估计



网络精品课程

例1 用天平秤某物体的重量9次，得平均值为 $\bar{x} = 15.4$ (克)，已知天平秤量结果为正态分布，其标准差为0.1克。试求该物体重量的0.95置信区间。

2. 单正态总体的区间估计



网络精品课程

例2 假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽12只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万公里）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

试求该轮胎寿命的0.95置信区间。

2. 单正态总体的区间估计



网络精品课程

例3 某厂生产的零件重量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，现从该厂生产的零件中抽取9个，测得其重量为（单位：克）

45.3 45.4 45.1 45.3 45.5 45.7 45.4 45.3 45.6

试求总体方差 σ^2 的0.95置信区间。

小 结

➤ 正态总体均值的区间估计

$$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \quad \bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1).$$

➤ 正态总体方差的区间估计

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$