石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

概率论与数理统计

大数定律和中心极限定理

大数定律和中心极限定理

主讲 ： 张少谱

目录

- 切比雪夫不等式
- 大数定律
- 中心极限定理

切比雪夫不等式

设随机变量X的方差存在(这时均值也存在),则对任意$\varepsilon>0$，有切比雪夫不等式：

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

或

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}>1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

注1 切比雪夫不等式意义：

理论意义：大数定律的基础.

应用意义：估计事件的概率.

切比雪夫不等式

例1 设随机变量X和Y的数学期望分别为-2和2，方差分别为1和4，且X和Y相互独立，则根据切比雪夫不等式，有$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$ ______.

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

大数定律—— 贝努利大数定律

引入 “频率稳定于概率”的确切含义

定理1（贝努利大数定律）

设 n_A 是n重贝努利试验中事件 A 发生的次数，每次试验中事件A 发生的概率$P(A)=p$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$ 依概率收敛

注 贝努利大数定律是“频率稳定于概率”的理论基础.

依概率收敛

称$\{Y_n\}$ **依概率收敛** 于Y, 记为$Y_n \xrightarrow{P} Y$,
若对任意的$\varepsilon>0$，有

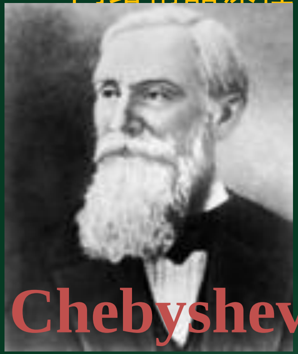
$$\lim_{n\to+\infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1$$

若随机变量序列$\{X_n\}$满足：对任意$\varepsilon>0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$$

则称$\{X_n\}$ **服从大数定律**.

大数定律——切比雪夫大数定律



定理 2（**切比雪夫大数定律**的特殊情况）

设$\{X_n\}$相互独立，且有相同的数学期望和方差：$E(X_k)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2$，则 $\{X_n\}$服从大数定律，即对任意$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu}$$

利用切比雪夫不等式证明.

注 贝努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例.

定理3 （独立同分布中心极限定理）

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，数学期望为μ, 方差为 $\sigma^2>0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le y\right\} = \Phi(y).$$

中心极限定理

网络精品课程

例2 每袋味精的净重为随机变量，平均重量为 100克，标准差为10克. 一箱内装200袋味精，求一箱味精的净重大于20500克的概率.

解 设X_i表示第 i 袋味精净重(i=1, 2, …, 200)， 则$X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ 独立同分布，且 $EX_i=100$，$DX_i=100$.

则所求概率为

$$P\{\sum_{i=1}^{200} X_i > 20500\} \approx 1-\Phi\left(\frac{20500-200\times 100}{\sqrt{200\times 100}}\right)$$

$$=1-\Phi(3.54)=0.0002$$

故一箱味精的净重大于20500克的概率为0.0002.

定理4 （德莫佛—拉普拉斯中心极限定理）

设$Y_n \sim B(n,p)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le y\right\} = \Phi(y).$$

注 独立同分布中心极限定理的特例.

➢ 当 n 充分大时，

$$P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le y\right\} \approx \Phi(y).$$

——二项分布的正态近似

中心极限定理

例3 有200台独立工作(工作的概率为0.6)的机床，每台机床工作时需1 kw电力. 问供应多少电力,才能有99.9%的概率保证正常生产?

解 设 X 表示工作的机床数，则 $X \sim B(200, 0.6)$.

设需供应电力r kw,才能有99.9%的概率保证正常生产.

由

$$P\{0 \le X \le r\} \approx \Phi\left(\frac{r-120}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{0-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{r-120}{\sqrt{48}}\right) \ge 0.999$$

得 $r \ge 141.$

故至少供应141kw电力,才能有99.9%的概率保证正常生产。