石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

概率论与数理统计

随机变量的数字特征

数学期望的性质

主讲 ：张少谱

目录

- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质

随机变量函数的数学期望

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

引例 设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y=g(X)=X^2$,求 $E(Y)$.

解 先求 $Y=X^2$ 的分布律

$Y=X^2$	0	1	4
p	p_2	p_1+p_3	p_4

随机变量函数的数学期望

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

则有 $$E(Y)=E(g(X))=E(X^2)$$

$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_2)+4\cdot p_4$$

$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_2+2^2\cdot p_4$$

$$=\sum_{k=1}^{4}g(x_k)P\{X=x_k\}.$$

随机变量函数的数学期望

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

- $Y = g(X)$

$$EY = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) P\{X = x_k\} & \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx & \text{连续型} \end{cases}$$

- $Z = g(X, Y)$

$$EZ = E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\} & \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy & \text{连续型} \end{cases}$$

$g(X, Y) = X$

$$EX = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dxdy \end{cases}$$

$g(X, Y) = Y$

$$EY = \begin{cases} \sum_i \sum_j y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dxdy \end{cases}$$

随机变量函数的数学期望

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

例1 设 X 的分布律为

X	0	1	2
P	1/2	1/4	1/4

求 $E(X^2+2)$.

例2 设 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$$

求 EX，EXY.

例3 在长为 a 的线段上任取两点 X 与 Y，求两点间的平均长度.

数学期望的性质

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

性质1 $E\,C = C \quad (C——Constant)$

性质2 $E(kX) = k\,EX$

性质3 $E(X+Y) = EX + EY \quad (E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} EX_k)$

性质4 当 X 与 Y 独立时, $EXY=EX\,EY$

$(E(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \prod_{k=1}^{n} EX_k, \quad X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立)

数学期望的性质

例4 (配对问题) 将 n 封信随机装入 n 个信封，求信与信封恰好配对的个数 X 的数学期望.

解 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{封信装入了第}i\text{个信封} \\ 0, & \text{第}i\text{封信未装入第}i\text{个信封} \end{cases}$$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

因为 $EX_i = 1/n$, 所以 $EX = 1$.