石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

二维随机变量及其分布

二维连续型随机变量的函数的分布(二)

主讲 ： 王亚红

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

实际背景

设有两个部件 I、II，其工作寿命分别为 X , Y

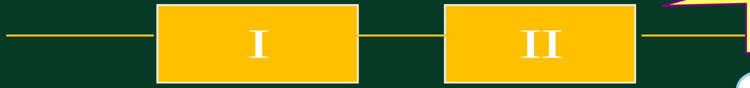
联接方式1 部件 I坏了,换上备用部件 II继续工作

系统寿命 $X+Y$

联接方式2 部件I、II 并联同时工作,仅当两个部件都损坏时，整个系统才失效

系统寿命 $\max\{X,Y\}$

联接方式3 部件 I、II串联同时工作,只要有一个部件损坏，整个系统就失效



系统寿命 $\min\{X,Y\}$

问题

怎样确定上述各系统的寿命？

1. Z = X+ Y的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y$$

特别地，X与Y 独立，则 Z= X+ Y 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

——卷积公式

例1 X与Y独立同服从$N(0, 1)$，

则 $Z = X + Y \sim N(0, 2)$.

解 X与Y独立同服从$N(0, 1)$，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \qquad Z = X + Y \sim N(0, 2).$$

常用的结论

若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,且$X$ 与Y独立,

则 $Z = X \pm Y \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

独立正态随机变量的线性组合仍为正态随机变量.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

2.最大、最小值函数的分布

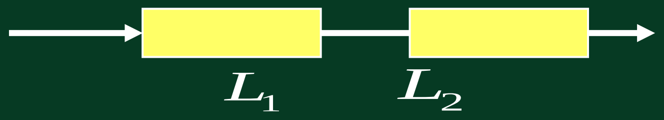
例2 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联.

设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上两种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

分析 (i)串联情况



由于当 L_1,L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作,

所以L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

$$F_{\min}(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}$$

$$=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\min}(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时，系统 L 才停止工作，

所以 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$$F_{\max}(z) = P\{\max(X,Y) \le z\}$$

$$= P\{X \le z, Y \le z\}$$

$$= P\{X \le z\}P\{Y \le z\}$$

$$= F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

思考：备用情况下系统的寿命Z的分布密度？

随机变量函数的分布 小结

1. 二维离散型随机变量函数的分布,
2. 二维连续型随机变量和的分布.