石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

二维随机变量及其分布

二维连续型随机变量（二）

主讲 ：王亚红

一、二维连续型随机变量的边缘分布

- 边缘分布函数可由联合分布函数确定

$$F(x, y) \Rightarrow \begin{cases} F_X(x) = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$$

- 边缘密度函数可由联合密度函数确定

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

例1 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

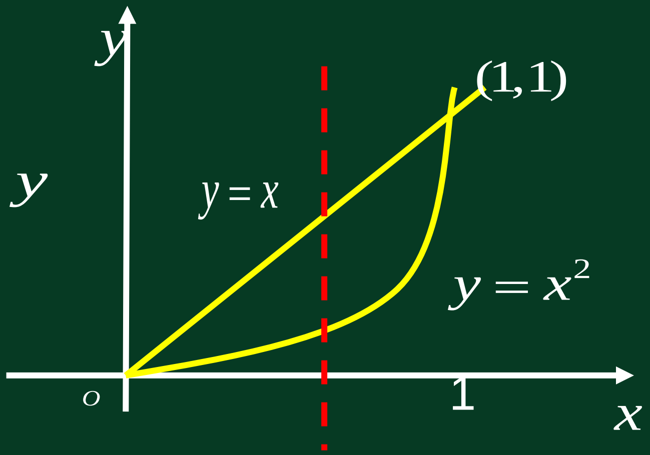
解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

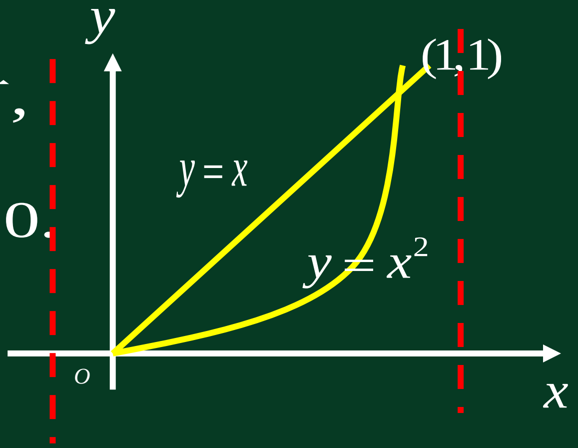
$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y$$

$$=6(x-x^2).$$



当 $x<0$ 或 $x>1$时，

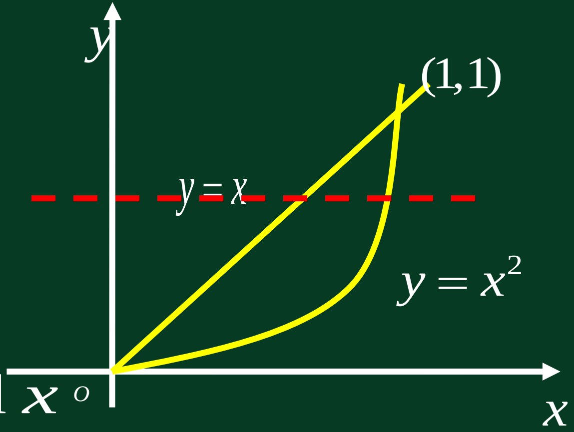
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$



因而得 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_y^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x = 6(\sqrt{y}-y). & \text{当 } 0\le y\le 1 \text{ 时},\\[2ex] 0 & \text{当 } y<0 \text{ 或 } y>1 \text{ 时},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二、连续型随机变量的独立性

（以两个为例）

X 和 Y 相互独立

$\Updownarrow$

$$f(x, y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

（在 $f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 的一切连续点处）

例1 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

问X与Y相互独立吗？

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)\,f_Y(y)$ **X与Y不相互独立**

常见的二维连续型随机变量的分布

(X, Y) 服从 D 上的均匀分布

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x, y)\in D\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

$$(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

$$f(x, y)=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

二维标准正态分布

$$N(0, 0, 1, 1, \rho)$$

小结

1. 理解二维连续型随机变量的概念，
2. 掌握联合密度函数性质和求边缘密度函数、判断独立性的方法

二维离散型 R.V.	二维连续型R.V.
联合分布律	联合密度函数
边缘分布律	边缘密度函数
相互独立性	相互独立性