石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

概率论与数理统计

随机变量及其分布

连续型随机变量的函数的分布

主讲 ： 王亚红

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

设X为连续型随机变量，具有概率密度$f_X(x)$，又$Y=g(X)$，在大部分情况下Y也是连续型随机变量，若Y是连续型随机变量，考虑求出Y的概率分布.

1. 定义法

先求出Y的分布函数$F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

再由$F_Y(y)$求出Y的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

例1 设 R.V. $X \sim N(0,1)$ $\quad Y = X^2$

求 Y的密度函数.

解 设 R.V. Y的分布函数为 $F_Y(y)$,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

$$= \begin{cases} P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

于是Y的密度函数

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}), & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

例2 设 R.V. X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求 $Y=2X+8$ 的密度函数.

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

解 设 R.V. Y的分布函数为 $F_Y(y)$,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le (y-8)/2\}=F_X[(y-8)/2]$$

于是Y的密度函数 $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=f_X\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases} (y-8)/32, & 8<y<16 \\ 0, & 其它 \end{cases}.$$

2. 公式法

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

定理1 X的密度函数为$f_X(x)$,$(-\infty<x<+\infty)$,函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x)>0$(或$g'(x)<0$),则$Y=g(x)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中$\alpha=\min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta=\max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $h(y)$是$g(x)$的反函数.

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

例3 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证明$Y=aX+b$ $(a\neq 0)$服从正态分布.

$$\text{设随机变量}X \sim N(\mu,\sigma^2).$$

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

特别地，设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y=(X-\mu)/\sigma$ 服从标准正态分布.

小结

1. 离散型随机变量函数的分布；
2. 连续型随机变量函数的分布（公式法和定义法）.