石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

采样控制系统分析

数学基础(3)

主讲 ： 郑海青

部分分式法

部分分式展开法是将$E(z)$展成若干个分式和的形式，而每一个分式可通过查表得出所对应的时间函数$e(t)$，并将其转变为采样信号$e^*(t)$。

注意：

在Z变换表中，许多Z变换函数分子上都有因子z，所以需要先把$E(z)/z$展开成部分分式，然后将展开的每一项都乘以z，即得$E(z)$的展开式。

$$\boxed{\frac{E(z)}{z}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}} \Rightarrow \boxed{E(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-z_i}} \Rightarrow \boxed{\frac{A_i z}{z-z_i}\xrightarrow{\text{查表}} e_i(t)\xrightarrow{\text{离散化}} e_i(kT)}$$

$$Z^{-1}[E(z)]=Z^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-z_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}e_i(kT)=e(kT)$$

$$e^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT)$$

例：设 $E(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$，求z反变换。

解：$\dfrac{E(z)}{z}=\dfrac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-e^{-aT}}$

$E(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$ $\qquad e(t)=1(t)-e^{-at}$

$e(nT)=1-e^{-anT}$ $\qquad e^{*}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(1-e^{-anT}\right)\delta\left(t-nT\right)\right]$

例：已知 $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ 求z反变换

解：$$\frac{E(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}$$

$$\Rightarrow e(kT)=-10+2^k*10$$

$$\Rightarrow e(kT) = -10 + 2^k * 10$$

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \ldots$$

$$= 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \ldots$$

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

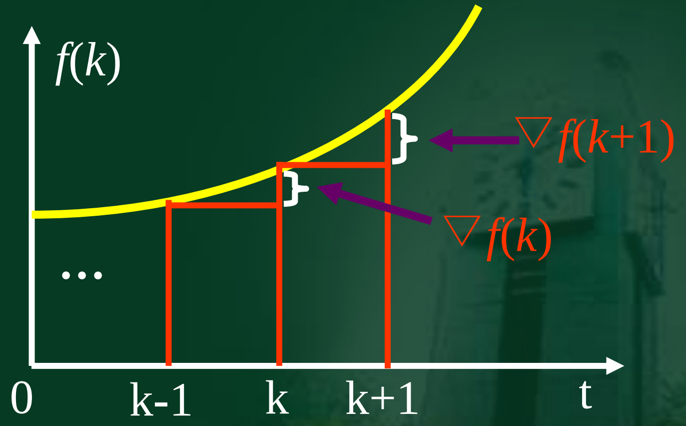
差分方程及其求解

1. 差分的定义 离散函数两数之差

$$=f(k)-2f(k-1)-f(k-2)$$

n阶后向差分定义为：

$$\nabla^n f(k)=\nabla^{n-1}f(k)-\nabla^{n-1}f(k-1)$$



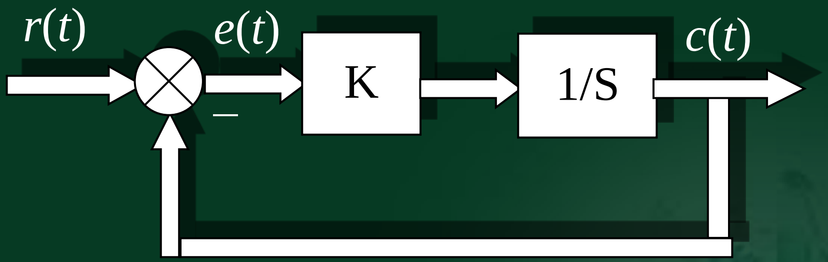
2. 差分方程

连续系统：微分方程 离散系统: 差分方程

离散化：用差分方程来近似表示微分方程

例　如图所示为一阶系统，一阶微分方程为：

$$\frac{dc(t)}{dt}+Kc(t)=Kr(t)$$



试将系统的微分方程离散化。

解：$$\frac{dc(t)}{dt}\approx\frac{c[(k+1)T]-c(kT)}{T}$$

$$\frac{c[(k+1)T]-c(kT)}{T}+Kc(kT)=Kr(kT)\quad c[(k+1)T]+(kT-1)c(kT)=KTr(kT)$$

3．用Z变换解差分方程

时域内的差分方程转换为Z 域内的代数方程，

求解后进行Z 反变换，求出系统各采样时刻的输出响应。

例　已知差分方程 $c(k\text{-}2)\text{-}5c(k\text{-}1)+6c(k) = r(k)$

式中$r(k)$=1(k)，试求$c(k)$

$$=\frac{z^3/6}{(z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6})(z-1)}=\frac{z^2/6}{(z-1)(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$=\frac{0.5z}{z-1}-\frac{0.5z}{z-1/2}-\frac{z/6}{z-1/3}$$

求z反变换得：$c(kT)=0.5-0.5(\frac{1}{2})^k+\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^k$

谢谢