



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

采样控制系统分析

数学基础

主讲：郑海青



一、Z变换的定义

引入新变量 $z = e^{Ts}$

$$\text{则 } F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k}$$

$F(z)$ 为 $f^*(t)$ 的Z变换, 记作

$$F(z) = Z[f^*(t)]$$



二、求Z变换的方法

1. 级数求和法

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$= f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \dots$$

利用级数求和法可求得常用函数的z变换.



(1) 单位阶跃函数

$$f(t) = 1(t) \quad f(kT) = 1(kT) = 1$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$



(2) 指数函数

$$f(t) = e^{-at} \quad f(kT) = e^{-akT}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad |ze^{at}| > 1$$



(3) 单位脉冲函数

$$f(t) = \delta(t) \quad f(kT) = \delta(kT)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} = 1$$



(4) 单位斜坡函数

$$f(t) = t \quad f(kT) = kT$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad \text{两边求导}$$

$$= Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$$

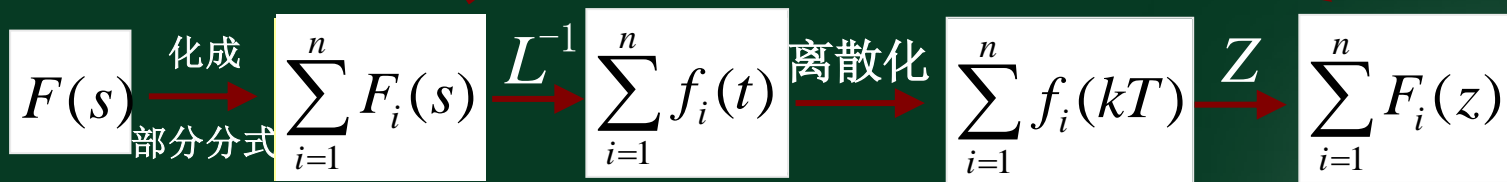
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-k)z^{-k-1} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$



2. 部分分式法 -- 适用于给定 $F(s)$ 的场合

查表





例 求 $F(s)$ 的 z 变换 $F(z)$ 。

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

解：

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$



例 求 $F(s)$ 的 z 变换 $F(z)$ 。

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

解：

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

谢谢