石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

采样控制系统分析

数学基础

主讲 ： 郑海青

一、Z变换的定义

引入新变量 $z = e^{Ts}$

则 $F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$

$F(z)$为 $f^*(t)$的Z变换，记作

$$F(z) = Z[f^*(t)]$$

二、求Z变换的方法

1. 级数求和法

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

$$= f(0)z^{0} + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \cdots$$

利用级数求和法可求得常用函数的z变换.

(1) 单位阶跃函数

$$f(t) = 1(t) \qquad f(kT) = 1(kT) = 1$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\, z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

(2) 指数函数

$$f(t) = e^{-at} \qquad f(kT) = e^{-akT}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \qquad |ze^{at}| > 1$$

(3) 单位脉冲函数

$$f(t)=\delta(t) \qquad f(kT)=\delta(kT)$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\, z^{-k}=1$$

(4) 单位斜坡函数

$$f(t) = t \qquad f(kT) = kT$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

两边求导

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-k) z^{-k-1} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$= Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad |z| > 1$$

2. 部分分式法 -- 适用于给定$F(s)$的场合

$$
\begin{tikzcd}
F(s) \arrow[r, "\text{化成}"', "\text{部分分式}"] & \sum_{i=1}^{n} F_i(s) \arrow[r, "L^{-1}"] \arrow[rrr, bend left, "\text{查表}"] & \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \arrow[r, "\text{离散化}"] & \sum_{i=1}^{n} f_i(kT) \arrow[r, "Z"] & \sum_{i=1}^{n} F_i(z) \\
& \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i} \arrow[r] & \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t} \arrow[rr] & & \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i z}{z-e^{s_i T}}
\end{tikzcd}
$$

例　求$F(s)$的z变换$F(z)$。

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

解：

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}=\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

例　求$F(s)$的z变换$F(z)$。

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$$

解：
$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

$$F(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}$$

谢谢