



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

时域分析法

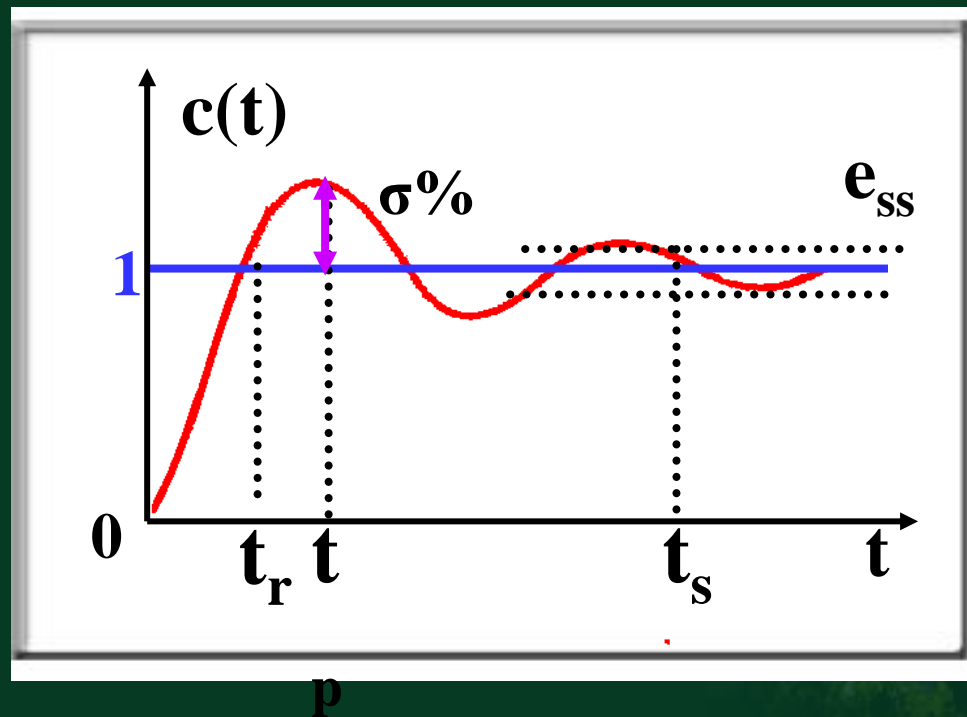
二阶系统的性能指标

主讲：王明明

欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应曲线

主要性能
指标有

性能指标求
取如下



(1) 上升时间 t_r

根据定义有

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 1$$

即
$$\frac{e^{-\zeta \omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

则
$$\sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

$$\omega_d t_r + \beta = 0, \pi, 2\pi \dots$$

得：

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

其中

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

(2) 峰值时间 t_p

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$$

根据定义有

$$\frac{dc(t_p)}{dt} = 0$$

即

$$\frac{dc(t_p)}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} [-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \beta)] = 0$$

$$= \frac{-\omega_n e^{-\zeta \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t_p + \beta) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta)] = 0$$

则 $\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t_p + \beta) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) = 0$

$$\frac{\sin(\omega_d t_p + \beta)}{\cos(\omega_d t_p + \beta)} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \text{tg}(\omega_d t_p + \beta) = \text{tg}\beta$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi \dots \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

(3) 超调量 $\sigma\%$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \text{将公式代入}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \beta)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \beta) = 1 + \frac{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\beta$$

$$c(t_p) = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\begin{aligned}\sigma\% &= \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} 100\% = \frac{c(t_p) - 1}{1} 100\% \\ &= e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}} 100\%\end{aligned}$$

(4) 调节时间 t_s

求取调节时间可用近似公式：

$$t_p = 3T = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad \zeta < 0.68 \quad (\pm 5\% \text{误差带})$$

$$t_p = 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad \zeta < 0.76 \quad (\pm 2\% \text{误差带})$$

当 ζ 大于上述值时，可用近似公式计算：

$$t_s = \frac{1}{\omega_n} (6.45\zeta - 1.7)$$

(5) 稳态误差 e_{ss}

根据稳态误差的定义和终值定理有

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} SE(s)$$

欠阻尼二阶系统的稳态误差：

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta \omega_n)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} = 0$$

由以上分析归纳出二阶系统性能分析要点：

1) 平稳性： 主要由 ζ 决定。

$\zeta \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow \rightarrow$ 平稳性越好, $\zeta = 0$ 时,
系统等幅振荡, 不能稳定工作. ζ 一定时

$\omega_n \uparrow \rightarrow \omega_d \uparrow$, 系统平稳性变差.

2) 快速性： 由 ζ 和 ω_n 决定。

ω_n 一定时,若 ζ 较小,则 $\zeta \downarrow \rightarrow t_s \uparrow$,

当 $\zeta > 0.707$ 之后又有 $\zeta \uparrow \rightarrow t_s \uparrow$,

即 ζ 太小或太大,快速性均变差.

综合考虑系统的平稳性和快速性, 一般取 $\zeta = 0.707$ 为最佳。

3) 准确性： 由 ζ 和 ω_n 决定。

ζ 的增加和 ω_n 的减小虽然对系统的平稳性有利，但使得系统跟踪 斜坡信号的稳态误差增加。

例 已知系统的闭环传递函数，当 $K = 2$, $K = 4$ 时，求系统的单位阶跃响应和 $\sigma\%$, t_s 。

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

解： (1) $K = 2$

$$\Phi(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{得} \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{2} \\ \zeta = 1.06 > 1 \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

系统性能指标

$$t_s = 3T_1 = 3$$

(2) $K = 4$

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = 2 \\ \zeta = 0.75 < 1 \end{array} \right.$$

系统性能指标

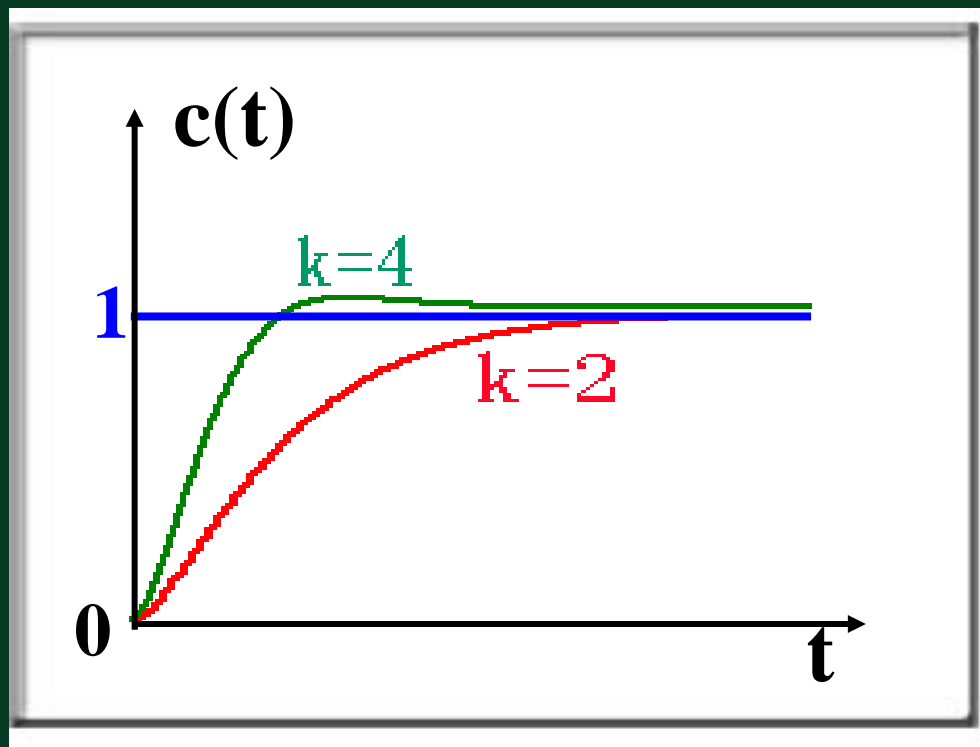
$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2.67$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}} 100\% = 2.8\%$$

单位阶跃响应

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \\ &= 1 - 1.5e^{-1.5t} \sin(1.32t + 41.4^\circ) \end{aligned}$$

系统的时域响应曲线



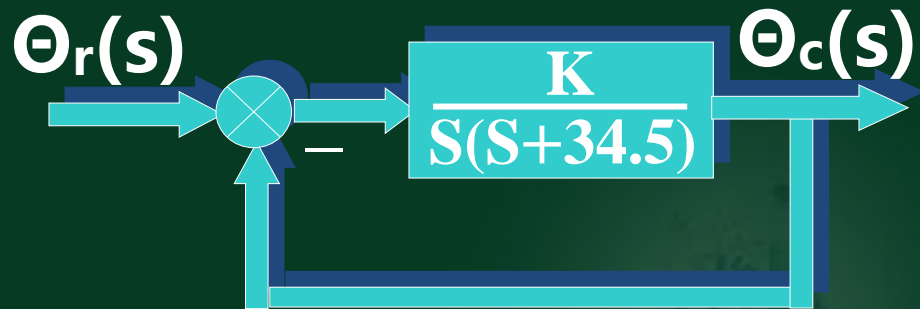
例 已知随动系统的结构如图，试计算在不同参数下，系统的动态性能指标。K=1000, K=7500, K=150。

解：闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 34.5s + K}$$

(1) K=1000

$$\Phi(s) = \frac{1000}{s^2 + 34.5s + 1000}$$



$$\begin{cases} \omega_n^2 = 1000 \\ \zeta \omega_n = 34.5 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_n = 31.6 \\ \zeta = 0.545 \end{cases}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.12 \quad t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 0.17$$

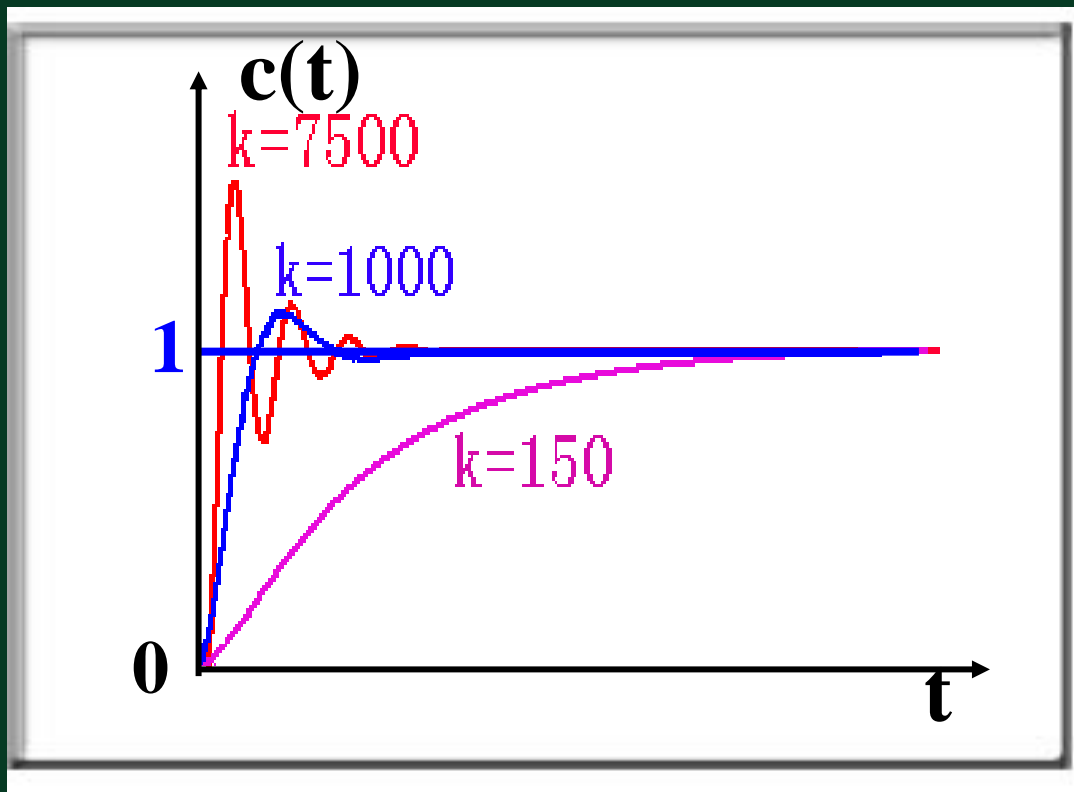
$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}} 100\% = 13\%$$

$$(2) \quad K=7500 \quad \begin{cases} \omega_n = 86.2 \\ \zeta = 0.2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_p = 0.037 \\ t_s = 0.17 \\ \sigma\% = 52.7\% \end{cases}$$

$$(3) \quad K=150 \quad \begin{cases} \omega_n = 12.25 \\ \zeta = 1.41 \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{150}{(s+5.1)(s+29.4)} \quad \begin{cases} T_1 = \frac{1}{5.1} = 0.196 \\ T_2 = \frac{1}{29.4} = 0.03 \end{cases}$$
$$t_s = 3T_1 = 0.588 \quad \sigma\% = 0$$

随动系统的响应曲线



谢谢!

