石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

时域分析法

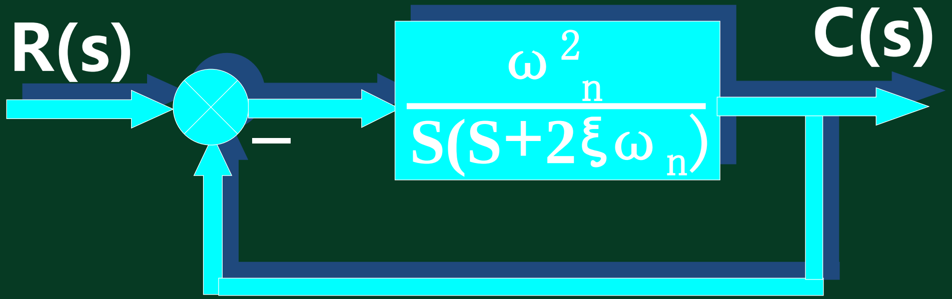
二阶系统的单位阶跃响应

主讲 ：王明明

1. 二阶系统的数学模型

二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。

二阶系统的典型结构:



$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$$

ζ — 阻尼比

ω_n — 无阻尼自然振荡频率

例如：RLC电路的传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCS^2+RCS+1}$$

$$=\frac{1/LC}{S^2+RS/L+1/LC}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$$

得：$\begin{cases} 2\zeta\omega_n=R/L \\ \omega_n^2=1/LC \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_n=1/\sqrt{LC} \\ \zeta=\dfrac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} \end{cases}$

二阶系统的参数与标准式的参数之间有着对应的关系。求出标准形式的动态性能指标与其参数间的关系，便可求得任何二阶系统的动态性能指标。

2. 二阶系统的单位阶跃响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n^2}{(S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2)S}$$

$$S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2=0$$

$$S_{1.2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

ζ值不同，单位阶跃响应的形式不相同。

(1) $\zeta>1$ 过阻尼

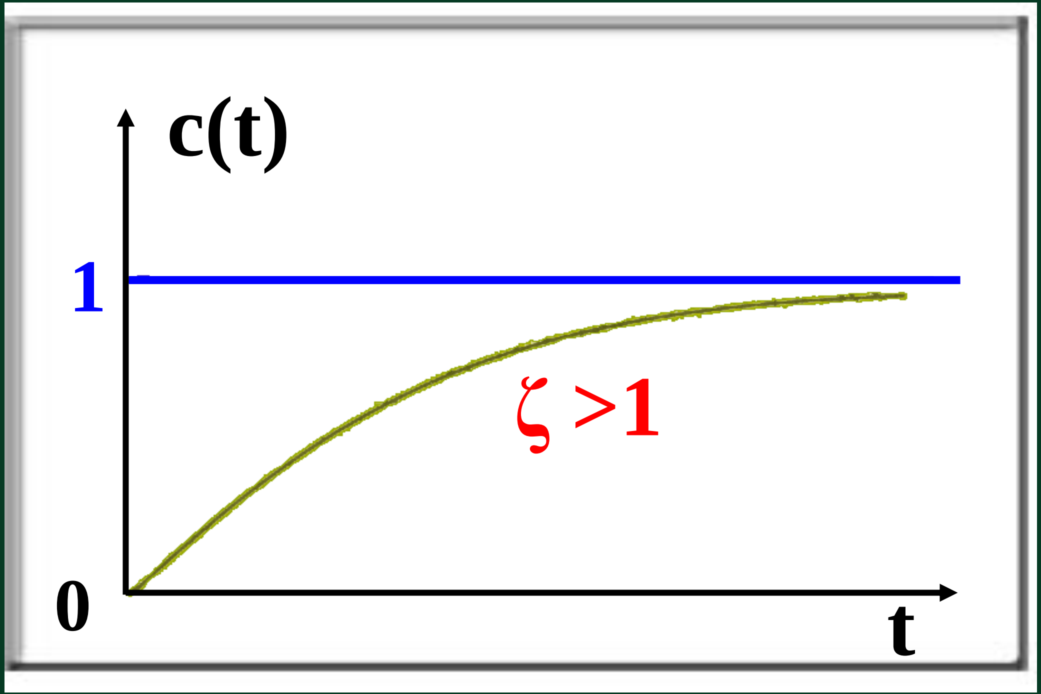
$$S_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$ 两个不相等的负实数根

$$C(s)=\frac{\omega_n}{S(S-S_1)(S-S_2)}=\frac{A_1}{S}+\frac{A_2}{S-S_1}+\frac{A_3}{S-S_2}$$

拉氏反变换 $c(t)=A_1+A_2e^{s_1t}+A_3e^{s_2t}$

系统输出随时间单调上升，无振荡和超调，输出响应最终趋于稳态值1。

过阻尼系统单位阶跃响应曲线



（2） ξ =1 临界阻尼

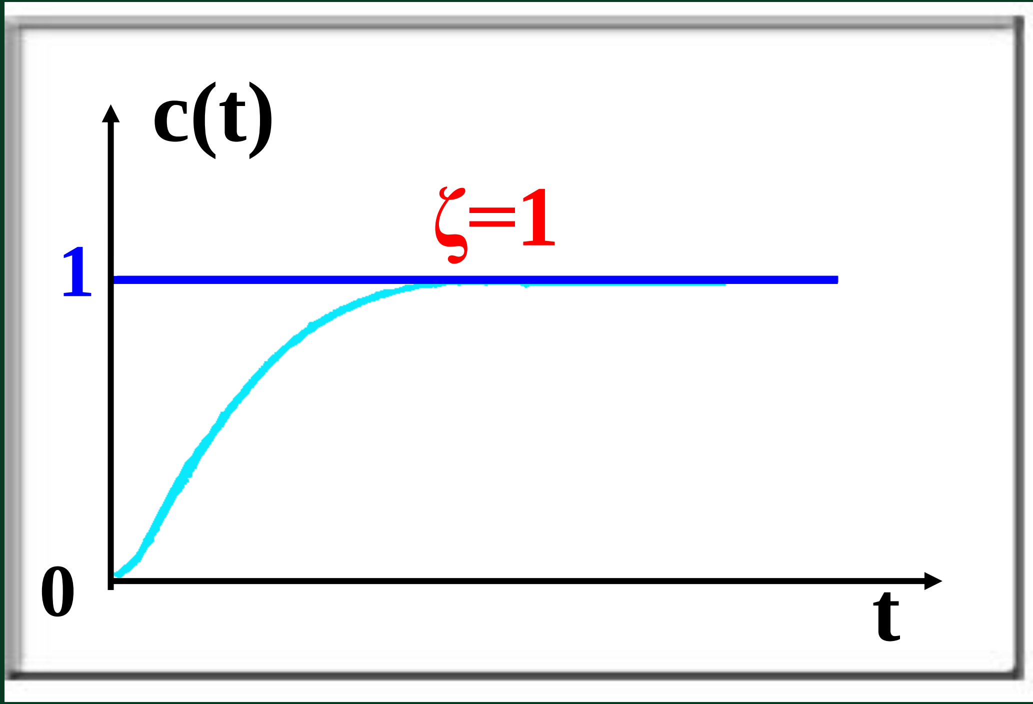
$S_{1.2}=-\omega_n$ 两个相等的负实数根

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(S+\omega_n)^2 S}=\frac{1}{S}-\frac{1}{S+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(S+\omega_n)^2}$$

输出响应： $c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$

输出响应无振荡和超调。ξ =1时系统的响应速度 比 ξ >1 时快。

临界阻尼系统单位阶跃响应曲线



（3） $0<\zeta<1$ 欠阻尼

$S_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ 两个复数根

令：$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ —— 阻尼振荡频率

则： $S_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d$

单位阶跃响应：

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2)S}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\cdot\frac{1}{S}$$

$$=\frac{1}{S}+\frac{-(S+\zeta\omega_n)}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

$$=\frac{1}{S}-\frac{S+\zeta\omega_n}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\omega_d}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

拉氏反变换:

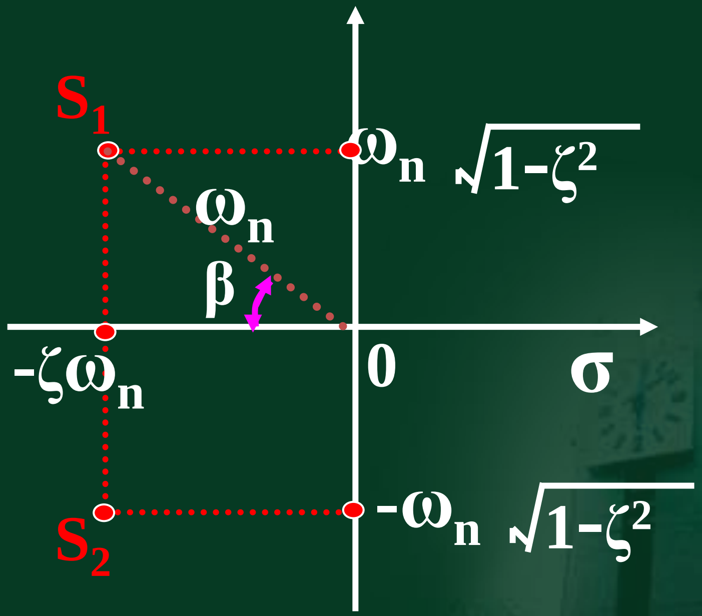
$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t-\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t\right]$$

系统参数间的关系:

$\cos\beta=\zeta$　　　$\sin\beta=\sqrt{1-\zeta^2}$

$\beta=tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

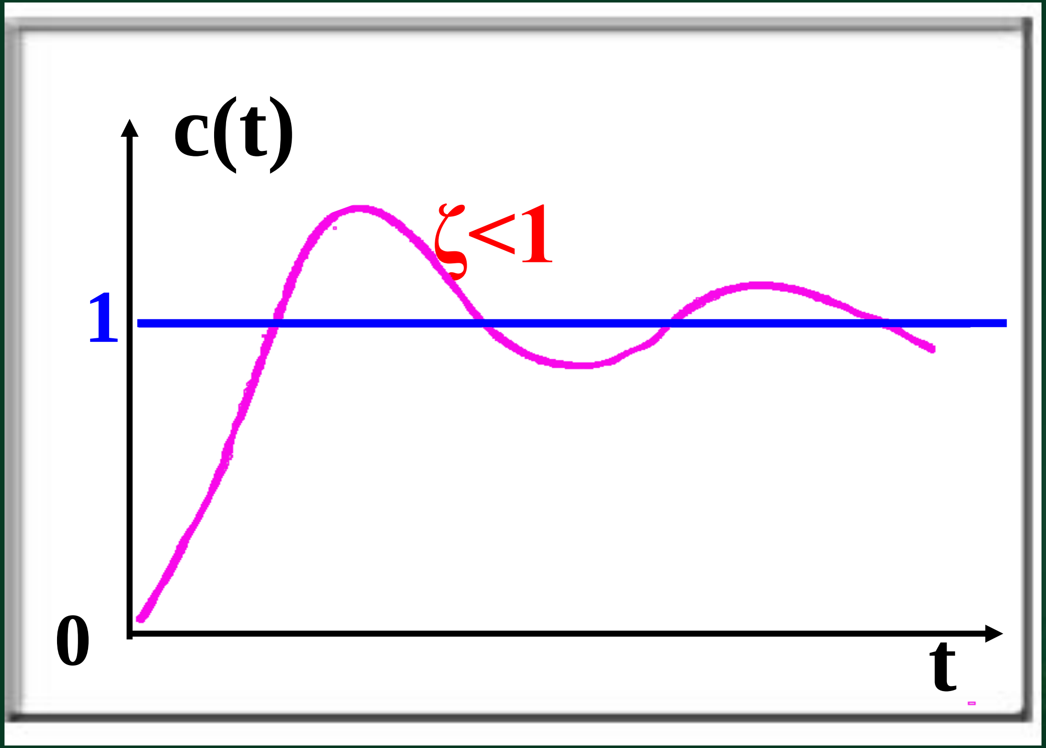


单位阶跃响应：

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sin\beta\cos\omega_d t+\cos\beta\sin\omega_d t\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{Sin}(\omega_d t+\beta)$$

欠阻尼系统单位阶跃响应曲线



(4) $\zeta=0$ 无阻尼 $S_{1,2}=\pm j\omega_n$

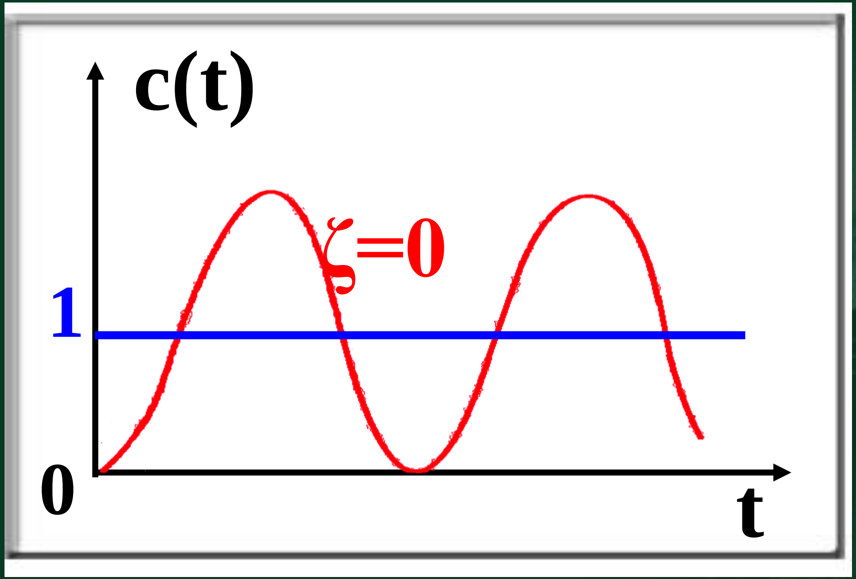
$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(S^2+\omega_n^2)S}$$

$$=\frac{1}{S}-\frac{S}{S^2+\omega_n^2}$$

单位阶跃响应:

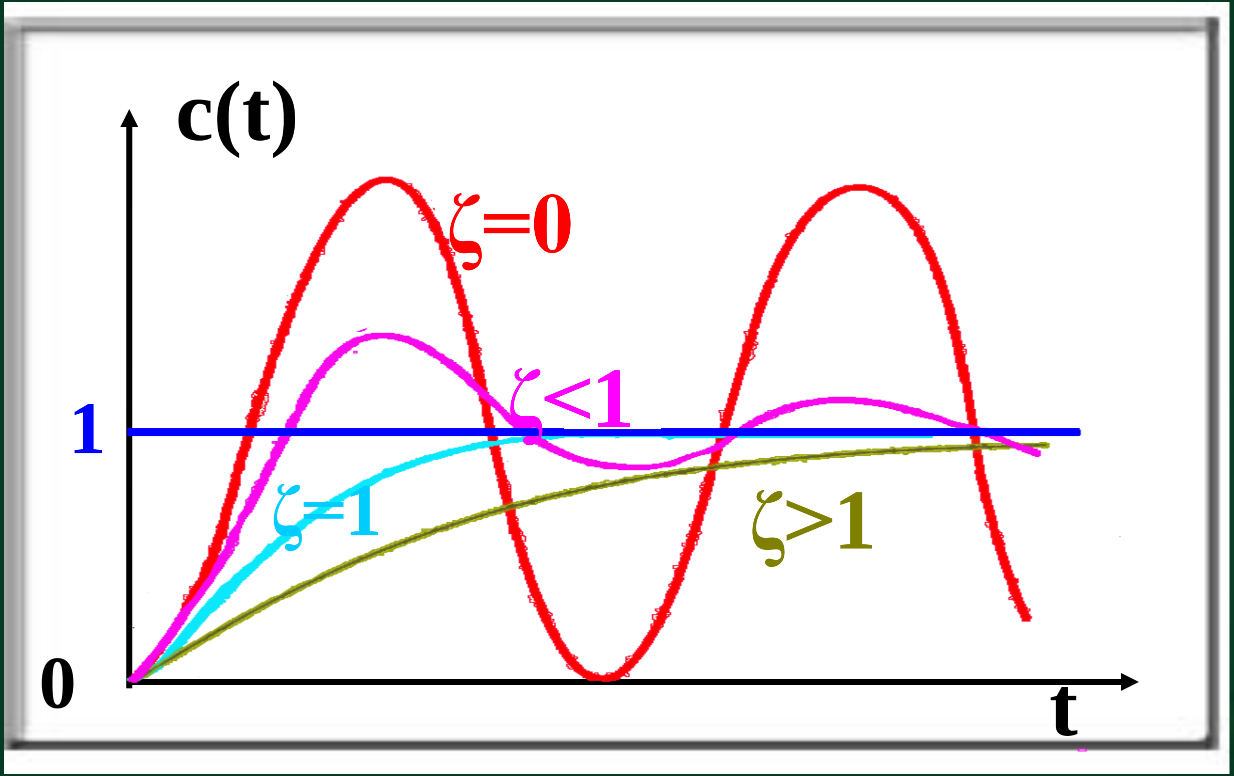
$$c(t)=1-\cos\omega_n t$$

单位阶跃响应曲线



不同ζ值时系统的单位阶跃响应

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程



谢谢！